Zwischentest Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2013/2014

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

10. Januar 2014

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 30 Minuten.

A1 (8)	A2 (5)	A3 (6)	A4 (4)	A5 (7)	Σ (30)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5+3 Punkte)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)", wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- f und g sind einstellige Funktionssymbole. A, B, C, D sind nullstellige, p, q einstellige und r ein zweistelliges Prädikatensymbol. x and y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein *halber Punkt* abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

	<u>keine</u> Formel der PL1	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$\exists x\ \neg\big(r(g(x), x) \to \forall y\ r(y, g(y))\big)$			X	
$(A \to C) \to \big(A \to (B \to C)\big)$		X		
$\big[\forall x\ (p(x) \land f(x))\big] \to \forall x\ p(f(x))$	X			
$\neg\exists x\big(q(x) \to (\forall x\ q(x))\big)$				X
$\forall x\ (p(x) \to p(f(x)))$			X	

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird *ein Punkt* abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Sei G eine prädikatenlogische Formel in Pränex-Normalform und G_{sko} ihre Skolemnormalform. Wenn eine Interpretation I Modell von G ist, dann ist I auch Modell von G_{sko}.		X
Die Aussage $sh(A \land B, C, D) \leftrightarrow sh(A, C, sh(B, C, D))$ ist eine Tautologie.	X	
Das Erfüllbarkeitsproblem für eine Menge aussagenlogischer Hornklauseln ist polynomiell entscheidbar.	X	

2 Interpolanten (1+4 Punkte)

Sei $A \rightarrow B$ eine aussagenlogische Tautologie und bezeichne $Var(X)$ die Menge der aussagenlogischen Atome, die in der aussagenlogischen Formel X vorkommen.

a. Welche Eigenschaften muss eine Formel I erfüllen, damit I eine Interpolante von $A \rightarrow B$ ist?

- $A \rightarrow I$ und $I \rightarrow B$ sind aussagenlogische Tautologien und
- es gilt $Var(I) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$.

b. Seinen I_1 und I_2 Interpolanten von $A \rightarrow B$.
Füllen Sie die Lücken in nachfolgenden Text aus, so daß ein Beweis entsteht für der Aussage:
$\neg I_1 \vee \neg I_2$ ist eine Interpolante für $\neg B \rightarrow \neg A$ von $A \rightarrow B$.

i. $\neg B \rightarrow \neg A$ ist eine ...

eine Tautologie, denn $\neg B \rightarrow \neg A$ ist logisch äquivalent zu $A \rightarrow B$ und diese Formel ist nach Voraussetzung eine Tautologie.

ii. Nach Voraussetzung gilt $Var(I_1) \subseteq \boxed{Var(A) \cap Var(B)}$ und $Var(I_2) \subseteq \boxed{Var(A) \cap Var(B).}$
Folglich gilt auch $Var(\neg I_1 \vee \neg I_2) \subseteq \boxed{Var(A) \cap Var(B)}$
wegen ... $\boxed{Var(\neg I_1 \vee \neg I_2) = Var(I_1) \cup Var(I_2).}$

iii. $\neg B \rightarrow \neg I_1 \vee \neg I_2$ ist eine Tautologie, weil ...

i. nach Vorlesung $I_1 \wedge I_2$ eine Interpolante zu $A \rightarrow B$ ist und
ii. $\neg B \rightarrow \neg I_1 \vee \neg I_2$ logisch äquivalent zu $I_1 \wedge I_2 \rightarrow B$ ist.

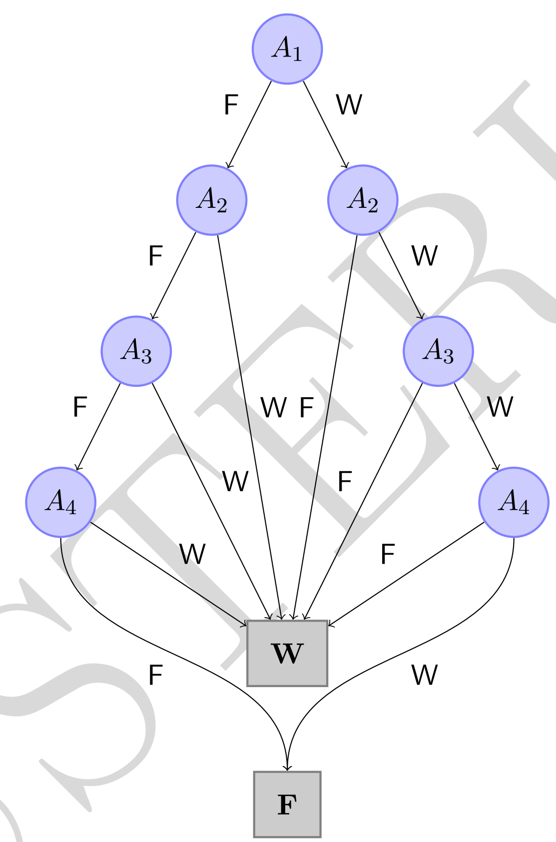
iv. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\boxed{\neg I_1 \vee \neg I_2 \rightarrow \neg A}$ eine Tautologie ist.
Das folgt ... $\boxed{\text{analog zu biii.}}$

3 Shannongraphen (5 + 1 Punkte)

Erinnerung: X **xor** Y ist definiert als $(X \land \neg Y) \lor (\neg X \land Y)$.

a. Konstruieren Sie den (bis auf Isomorphie eindeutigen) reduzierten Shannon-Graphen (OBDD) von $F^4_{\mathbf{xor}} = (A_1 \textbf{ xor } A_2) \lor (A_1 \textbf{ xor } A_3) \lor (A_1 \textbf{ xor } A_4) \lor (A_2 \textbf{ xor } A_3) \lor (A_2 \textbf{ xor } A_4) \lor (A_3 \textbf{ xor } A_4)$ zu der Variablen-Ordnung $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$.

Hinweis: $F^4_{\mathbf{xor}}$ ist genau dann erfüllt, wenn A_i **xor** A_j für ein Paar (i, j) mit $1 \leq i, j \leq 4$ und $j \neq i$ zu wahr auswertet.



b. Sei $F^n_{\mathbf{xor}}$ die naheliegende Verallgemeinerung von $F^4_{\mathbf{xor}}$ über Atomen $A_1, \ldots, A_n$, die genau dann erfüllt ist, wenn A_i **xor** A_j für ein Paar (i, j) mit $1 \leq i, j \leq n$ und $j \neq i$ zu wahr auswertet.

Wie viele innere Knoten (d. h. Knoten, die nicht $\boxed{\mathbf{F}}$ oder $\boxed{\mathbf{W}}$ sind) besitzt der (bis auf Isomorphie eindeutige) reduzierte Shannon-Graph zu $F^n_{\mathbf{xor}}$ (zu der Variablen-Ordnung $A_1 < \ldots < A_n$)?

Antwort: $2n - 1$

4 Formalisieren in Prädikatenlogik (0,5 + 1 + 1 + 1,5 = 4 Punkte)

Formalisieren Sie die vier folgenden Aussagen über Himmelskörper in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dafür jeweils die folgenden interpretierten Symbole:

- Funktionssymbole (jeweils nullstellig): *Erde*, *Mond*, *Jupiter*, *Neptun*. Die Symbole werden ihrem Namen entsprechend interpretiert.
- Prädikatensymbole (jeweils zweistellig):
  - $U(\cdot,\cdot)$ mit der Semantik $(x,y) \in \mathcal{I}(U)$ gdw. Himmelskörper x umkreist Himmelskörper y.
  - $\cdot > \cdot$ mit der Semantik $(x,y) \in \mathcal{I}(>)$ gdw. Himmelskörper x ist größer als Himmelskörper y.

Sie können davon ausgehen, dass alle Formeln mit der Menge der Himmelskörper als Universum interpretiert werden. Weitere Annahmen über die Interpretation $\mathcal{I}$ als die obigen dürfen Sie nicht machen.

a. Der Mond umkreist die Erde.

$\boxed{U(\mathit{Mond}, \mathit{Erde})}$

---

b. Jeder Himmelskörper wird von einem <u>anderen</u> Himmelskörper umkreist.

$\boxed{\forall x \exists y \big(U(y,x) \land \neg x \doteq y\big)}$

---

c. Jupiter ist größer als jeder Himmelskörper, der ihn umkreist.

$\boxed{\forall x \big(U(x, \mathit{Jupiter}) \rightarrow \mathit{Jupiter} > x\big)}$

---

d. Kein Himmelskörper, der größer ist als Jupiter, ist größer als Neptun.

$\boxed{\neg \exists\, x \big((x > \mathit{Jupiter}) \land (x > \mathit{Neptun})\big)}$

---

5 Tableaukalkül (7 Punkte)

Seien p und q einstellige Prädikatensymbole und f ein einstelliges Funktionszeichen. Vervollständigen und schließen Sie den folgenden prädikatenlogischen Tableau-Beweis. Notieren Sie dabei:

- bei jeder Erweiterung, durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau enstanden ist,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

$$1\ \forall x.(p(f(x)) \to \neg p(x))\ {}_{1}$$

$$1\ \forall x.(q(f(x)) \to p(f(x)))\ {}_{2}$$

$$1\ \forall x\ \exists y\ (p(x) \land q(y))\ {}_{3}$$

$$1\ (p(f(X_1)) \to \neg p(X_1))\ {}_{4[\gamma(1)]}$$

Linker Zweig:

$$0\ p(f(X_1))\ {}_{5[\beta(4)]}$$

$$1\ \exists y.(p(X_3) \land q(y))\ {}_{11[\gamma(3)]}$$

$$1\ (p(X_3) \land q(sk_2(X_3)))\ {}_{12[\delta(11)]}$$

$$1\ p(X_3)\ {}_{13[\alpha(12)]}$$

$$1\ q(sk_2(X_3))\ {}_{14[\alpha(12)]}$$

$$*_{5,13}$$

Rechter Zweig:

$$1\ \neg p(X_1)\ {}_{6[\beta(4)]}$$

$$1\ \exists y.(p(X_2) \land q(y))\ {}_{7[\gamma(3)]}$$

$$1\ (p(X_2) \land q(sk_1(X_2)))\ {}_{8[\delta(7)]}$$

$$1\ p(X_2)\ {}_{9[\alpha(8)]}$$

$$1\ q(sk_1(X_2))\ {}_{10[\alpha(8)]}$$

$$0\ p(X_1)\ {}_{15[\alpha(6)]}$$

$$*_{6,15}$$

Die schließende Substitution ist $\sigma = \{X_2/X_1, X_3/f(X_1)\}$.