Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 20.12.2013 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie oder widerlegen Sie mithilfe des Tableaukalküls für die Aussagenlogik die Allgemeingültigkeit folgender Formeln. Falls eine der Formeln nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine erfüllende Belegung ihres Negats als Gegenbeispiel an.

(a) $((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(b) $(B \to C) \to ((A \to B) \to C)$

Aufgabe 2

(a) Geben Sie für den *sh*-Operator korrekte und vollständige Regeln für den aussagenlogischen Tableaukalkül an.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Regeln aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3

In der Vorlesung ist folgender Satz als Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem vorgestellt worden und mithilfe des Resolutionskalküls bewiesen worden:

Jede transitive (1), symmetrische (2) und endlose (3) binäre Relation ist reflexiv (4).

Formalisiert als Folgerung in Prädikatenlogik lautet die Aussage folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\{ \quad & \forall x \forall y \forall z \big(r(x,y) \land r(y,z) \to r(x,z)\big)\ , && (1)\\
& \forall x \forall y \big(r(x,y) \to r(y,x)\big)\ , && (2)\\
& \forall x \exists y \big(r(x,y)\big)\ \} && (3)\\
\models \quad & \forall x \big(r(x,x)\big) && (4)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls, dass die oben stehende Aussage gilt.

Aufgabe 4

In der Abschlussregel des Tableaukalküls (Definition 5.4 im Skriptum) wird gefordert, dass eine schließende Substitution immer auf das gesamte Tableau angewandt werden muss, und nicht etwa nur auf den Pfad, der gerade geschlossen wird.

Geben Sie eine geschlossene[1], *nicht* allgemeingültige PL1-Formel φ und ein zugehöriges Tableau für 0φ an, das (fälschlicherweise) geschlossen[1] werden könnte, wenn die Abschlusssubstitution nur auf jeweils einen Pfad angewendet werden müsste.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls, dass die Formel

$$\forall y \forall x \forall z \big((p(x,z) \to p(y,z)) \to q(x,y)\big) \land \neg \exists y \forall x (q(x,x) \lor r(y))$$

unerfüllbar ist.

[1]Beachten Sie: Das Wort „geschlossen“ hat hier zwei unterschiedliche Bedeutungen. Eine Formel ist geschlossen, wenn sie keine freien Variablen enthält. Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste einen Widerspruch $1\psi, 0\psi$ enthält.