Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 20.12.2013 besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie oder widerlegen Sie mithilfe des Tableaukalküls für die Aussagenlogik die Allgemeingültigkeit folgender Formeln. Falls eine der Formeln nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine erfüllende Belegung ihres Negats als Gegenbeispiel an.

(a) $((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(b) $(B \to C) \to ((A \to B) \to C)$

Lösung zu Aufgabe 1

Abbildung 1 zeigt Tableaubeweise für beide Teilaufgaben. Das Tableau für Teilaufgabe (a) lässt sich schließen, die Allgemeingültigkeit der Formel φ_a ist damit bewiesen.

Das Tableau für die Formel $\neg\varphi_b$ lässt sich auch im erschöpften Zustand nicht schließen, daher ist $\neg\varphi_b$ erfüllbar, φ_b also nicht allgemeingültig.

Die Abbildungen sind mit der Vorzeichen-Variante des Kalküls aus der Vorlesung erstellt und die Regelanwendungen darin markiert. Dabei steht eine rote Kante für eine α- und eine blaue für eine β-Erweiterung. Die jeweils letzten Formeln im Tableau von (b) gehen aus der β-Formel $1B \to C$ hervor.

Ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau hat einen Ast, der nicht geschlossen werden kann. Dieser Erlaubt das Ablesen einer Interpretation, die die Wurzelformel erfüllt: Setze für jede Variable $P \in \Sigma$

- wenn $0P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := F$,
- wenn $1P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := W$.
- andernfalls $I(P)$ beliebig.

Zur Begründung siehe Lemma 3.34 im Skript.

Insbesondere wird die Wurzel des Baumes erfüllt, das Negat der Formel, die auf Allgemeingültigkeit überprüft werden soll. Für diese Formel ist die Belegung also ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit.

Für (b) ist das der Fall für die Belegung I mit $I(A) = I(B) = I(C) = F$. Denn dann gilt: $\mathrm{val}_I(\phi_b) = F$.

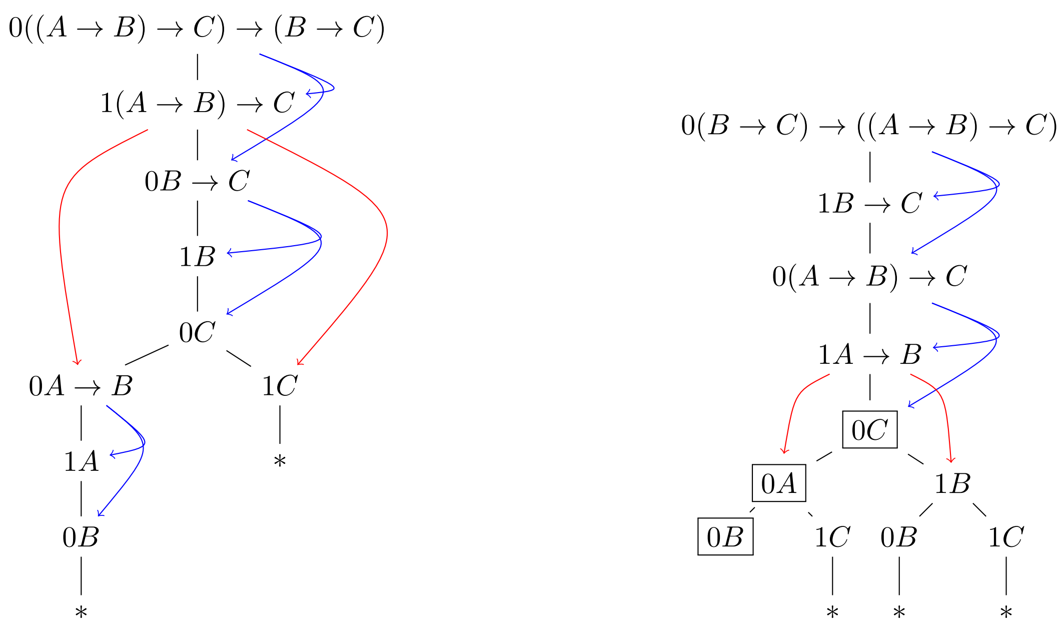

Abbildung 1: Tableaubeweise zu Aufgabe 1(a) (links) und 1(b) (rechts)

Aufgabe 2

(a) Geben Sie für den sh-Operator korrekte und vollständige Regeln für den aussagenlogischen Tableaukalkül an.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Regeln aus Teilaufgabe (a).

Lösung zu Aufgabe 2

(a)

$$\frac{1sh(P_1, P_2, P_3)}{\begin{array}{c|c} 1P_1 & 0P_1 \\ 1P_3 & 1P_2 \end{array}} \qquad\qquad \frac{0sh(P_1, P_2, P_3)}{\begin{array}{c|c} 1P_1 & 0P_1 \\ 0P_3 & 0P_2 \end{array}}$$

(b) Es ist zu zeigen: Für eine beliebige Interpretation I gilt

$$\mathrm{val}_I(1sh(P_1, P_2, P_3)) = W \qquad \text{gdw.} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1P_3) = W \\ \text{oder} \\ \mathrm{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1P_2) = W \end{array}$$

Dabei ist die Richtung $\Rightarrow$ der Korrektheits- und die Richtung $\Leftarrow$ der Vollständigkeitsteil des Beweises.

Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{val}_I(1sh(P_1, P_2, P_3)) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(P_1 \wedge P_3 \vee \neg P_1 \wedge P_2) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(P_1 \wedge P_3) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg P_1 \wedge P_2) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(P_3) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(\neg P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(P_2) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1P_3) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(1P_2) = W \end{array}$$

Analog für ist für die zweite Regel zu zeigen, dass

$$\mathrm{val}_I(0sh(P_1, P_2, P_3)) = W \qquad \text{gdw.} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_3) = W \\ \text{oder} \\ \mathrm{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_2) = W \end{array}$$

Das ergibt sich aus:

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{val}_I(0sh(P_1, P_2, P_3)) = W \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = F \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I((P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)) = F \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I((\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)) = F \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(\neg P_1 \vee P_3) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(P_1 \vee P_2) = F \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(\neg P_1) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(P_3) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(P_1) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(P_2) = F \\ \text{gdw.} & \mathrm{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_3) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_2) = W \end{array}$$

Aufgabe 3

In der Vorlesung ist folgender Satz als Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem vorgestellt worden und mithilfe des Resolutionskalküls bewiesen worden:

> Jede transitive (1), symmetrische (2) und endlose (3) binäre Relation ist reflexiv (4).

Formalisiert als Folgerung in Prädikatenlogik lautet die Aussage folgendermaßen:

$$
\begin{array}{ll}
\{ & \forall x \forall y \forall z \big(r(x,y) \land r(y,z) \to r(x,z) \big) \ , \qquad (1) \\
 & \forall x \forall y \big(r(x,y) \to r(y,x) \big) \ , \qquad (2) \\
 & \forall x \exists y \big(r(x,y) \big) \ \} \qquad (3) \\
\models & \forall x \big(r(x,x) \big) \qquad (4)
\end{array}
$$

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls, dass die oben stehende Aussage gilt.

Lösung zu Aufgabe 3

siehe Abbildung 2.

Aufgabe 4

In der Abschlussregel des Tableaukalküls (Definition 5.4 im Skriptum) wird gefordert, dass eine schließende Substitution immer auf das gesamte Tableau angewandt werden muss, und nicht etwa nur auf den Pfad, der gerade geschlossen wird.

Geben Sie eine geschlossene[1], *nicht* allgemeingültige PL1-Formel φ und ein zugehöriges Tableau für 0φ an, das (fälschlicherweise) geschlossen[1] werden könnte, wenn die Abschlusssubstitution nur auf jeweils einen Pfad angewendet werden müsste.

Lösung zu Aufgabe 4

Betrachte $\phi = (\forall x(p(x) \lor q(x))) \to (p(a) \lor q(b))$.

Tableau für 0ϕ:

$$
\begin{array}{ccc}
 & 0\phi & (0) \\
 & | & \\
 & 1\forall x(p(x) \lor q(x)) & (1)\ [\alpha(0)] \\
 & | & \\
 & 0(p(a) \lor q(b)) & (2)\ [\alpha(0)] \\
 & | & \\
 & 0p(a) & (3)\ [\alpha(2)] \\
 & | & \\
 & 0q(b) & (4)\ [\alpha(2)] \\
 & | & \\
 & 1p(X) \lor q(X) & (5)\ [\gamma(1)] \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
(6)\ [\beta(5)]\ \ 1p(X) & & 1q(X)\ \ (7)\ [\beta(5)]
\end{array}
$$

Der linke Ast kann nun durch die Substitution X/a geschlossen werden. Wird diese nur lokal (d.h. auf dem Ast) angewendet, kann der rechte Ast durch X/b geschlossen werden.

[1]Beachten Sie: Das Wort „geschlossen“ hat hier zwei unterschiedliche Bedeutungen. Eine Formel ist geschlossen, wenn sie keine freien Variablen enthält. Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste einen Widerspruch $1\psi, 0\psi$ enthält.

$$1\forall x.\exists y.r(x,y) \quad {\scriptstyle 1}$$

$$1\forall x.\forall y.\forall z.((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z)) \quad {\scriptstyle 2}$$

$$1\forall x.\forall y.(r(x,y) \rightarrow r(y,x)) \quad {\scriptstyle 3}$$

$$0\forall x.r(x,x) \quad {\scriptstyle 4}$$

$$0r(sk_1, sk_1) \quad {\scriptstyle 5[\delta(4)]}$$

$$1\exists y.r(X_1^*, y) \quad {\scriptstyle 6[\gamma(1)]}$$

$$1r(X_1^*, sk_2(X_1^*)) \quad {\scriptstyle 7[\delta(6)]}$$

$$1\forall y.(r(X_1^*, y) \rightarrow r(y, X_1^*)) \quad {\scriptstyle 8[\gamma(3)]}$$

$$1(r(X_2^*, X_3^*) \rightarrow r(X_3^*, X_2^*)) \quad {\scriptstyle 9[\gamma(8)]}$$

$$0r(X_2^*, X_3^*) \quad {\scriptstyle 10[\beta(9)]} \qquad * _{[7,10]}$$

$$1r(X_3^*, X_2^*) \quad {\scriptstyle 11[\beta(9)]}$$

$$1\forall y.\forall z.((r(X_4^*, y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(X_4^*, z)) \quad {\scriptstyle 12[\gamma(2)]}$$

$$1\forall z.((r(X_4^*, X_5^*) \wedge r(X_5^*, z)) \rightarrow r(X_4^*, z)) \quad {\scriptstyle 13[\gamma(12)]}$$

$$1((r(X_4^*, X_5^*) \wedge r(X_5^*, X_6^*)) \rightarrow r(X_4^*, X_6^*)) \quad {\scriptstyle 14[\gamma(13)]}$$

$$0(r(X_4^*, X_5^*) \wedge r(X_5^*, X_6^*)) \quad {\scriptstyle 15[\beta(14)]} \qquad 1r(X_4^*, X_6^*) \quad {\scriptstyle 16[\beta(14)]} \quad * _{[5,16]}$$

$$0r(X_4^*, X_5^*) \quad {\scriptstyle 17[\beta(15)]} \quad * _{[7,17]} \qquad 0r(X_5^*, X_6^*) \quad {\scriptstyle 18[\beta(15)]} \quad * _{[11,18]}$$

Substitution: $\sigma = \{X_1/sk_1, X_2/sk_1, X_3/sk_2(sk_1), X_4/sk_1, X_5/sk_2(sk_1), X_6/sk_1\}$

Abbildung 2: Tableau für Aufgabe 3

Die Formel ϕ ist aber nicht allgemeingültig, wie folgende (Herbrand-)Interpretation (D, I) beweist:

$$\begin{aligned} D &= \{a, b\} \\ I(p) &= \{b\} \\ I(q) &= \{a\} \end{aligned}$$

Es gilt $\text{val}_I(\forall x(p(x) \vee q(x))) = W$ aber $\text{val}_I(p(a)) = F$ und $\text{val}_I(q(b)) = F$

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls, dass die Formel

$$\forall y \forall x \forall z \big((p(x, z) \to p(y, z)) \to q(x, y)\big) \wedge \neg \exists y \forall x (q(x, x) \vee r(y))$$

unerfüllbar ist.

Lösung zu Aufgabe 5

Ein geschlossenes Tableau zu der Vorezeichenformel

$$1\ \forall y \forall x \forall z \big((p(x, z) \to p(y, z)) \to q(x, y)\big) \wedge \neg \exists y \forall x (q(x, x) \vee r(y))$$

ist in in Abbildung 3 dargestellt. Die schließende Substitution ist dabei: $\{X2 = sk1(X1), X3 = sk1(X1)\}$

$$1\ (\forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(y,z)) \to q(x,y)) \wedge \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y)))\ {}_{1}$$

$$1\ \forall y.\forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(y,z)) \to q(x,y))\ {}_{2[\alpha(1)]}$$

$$1\ \neg\exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {}_{3[\alpha(1)]}$$

$$0\ \exists y.\forall x.(q(x,x) \vee r(y))\ {}_{4[\alpha(3)]}$$

$$0\ \forall x.(q(x,x) \vee r(X_1))\ {}_{5[\gamma(4)]}$$

$$0\ (q(sk_1(X_1), sk_1(X_1)) \vee r(X_1))\ {}_{6[\delta(5)]}$$

$$0\ q(sk_1(X_1), sk_1(X_1))\ {}_{7[\alpha(6)]}$$

$$0\ r(X_1)\ {}_{8[\alpha(6)]}$$

$$1\ \forall x.\forall z.((p(x,z) \to p(X_2^*,z)) \to q(x,X_2^*))\ {}_{9[\gamma(2)]}$$

$$1\ \forall z.((p(X_3^*,z) \to p(X_2^*,z)) \to q(X_3^*,X_2^*))\ {}_{10[\gamma(9)]}$$

$$1\ ((p(X_3^*,X_4) \to p(X_2^*,X_4)) \to q(X_3^*,X_2^*))\ {}_{11[\gamma(10)]}$$

$$\begin{array}{cc}
0\ (p(X_3^*,X_4) \to p(X_2^*,X_4))\ {}_{12[\beta(11)]} & 1\ q(X_3^*,X_2^*)\ {}_{13[\beta(11)]} \\
 & *_{[7,13]} \\
1\ p(X_3^*,X_4)\ {}_{14[\alpha(12)]} & \\
0\ p(X_2^*,X_4)\ {}_{15[\alpha(12)]} & \\
*_{[14,15]} &
\end{array}$$

Abbildung 3: Tableau für Aufg. 5