

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 13.12.2013 besprochen.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Hilbertkalküls aus der Vorlesung die Aussage

$$\models \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) . \quad (1)$$

Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Deduktionstheorem.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Hilbertkalküls aus der Vorlesung die Aussage

$$\models (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A .$$

Sie können in der Ableitung die Aussage (1) aus (a) als Axiom verwenden.

Hinweis: Diese Teilaufgabe ist kniffliger als (a). Es empfiehlt sich bei der Ableitung mit Gleichung (1) zu beginnen, worin B durch einen geeigneten Term ersetzt wurde.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir präsentieren hier die einzelnen Ableitungen im Kalkül, wobei

- (Ax1) für das Abschwächungsaxiom,
- (Ax2) für das Verteilungsaxiom,
- (Ax3) für das Kontrapositionsaxiom,
- (MP n, m) für Modus Ponens mit den beiden beteiligten Formeln (n) und (m),
- (DT n) für das Deduktionstheorem mit der Ausgangsformel (n)

notiert wird.

(a) Die Ableitung im Hilbertkalkül ist:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) & (1) \text{ (Ax1)} \\
 \{\neg A\} \vdash \neg B \rightarrow \neg A & (2) \text{ (DT 1)} \\
 \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) & (3) \text{ (Ax3)} \\
 \{\neg A\} \vdash A \rightarrow B & (4) \text{ (MP 2,3)} \\
 \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) & (5) \text{ (DT 4)}
 \end{array}$$

Aus der Korrektheit des Hilbertkalküls folgt die Behauptung.

(b) Die geschickte Instanziierung von B ist $\neg(\neg A \rightarrow A)$.

\vdash	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	(6)	Aus (5)
\vdash	$[\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))] \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))]$	(7)	(Ax2)
\vdash	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	(8)	(MP 6,7)
$\{\neg A \rightarrow A\} \vdash$	$\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$	(9)	(DT 8)
\vdash	$[\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)] \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A]$	(10)	(Ax3)
$\{\neg A \rightarrow A\} \vdash$	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	(11)	(MP 9,10)
$\{\neg A \rightarrow A\} \vdash$	A	(11)	DT(10)
\vdash	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	(12)	DT(11)

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Landkarte mit L Ländern, die mit den Zahlen von 0 bis $L - 1$ bezeichnet werden. Die binäre Relation $Na(i, j)$ trifft auf zwei Länder i und j zu ($0 \leq i, j < L$), wenn sie benachbart sind. Die Landkarte soll nun mit den **drei** Farben *rot*, *grün* und *blau* so eingefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Länder dieselbe Farbe erhalten.

Geben Sie eine Menge F von aussagenlogischen Formeln an, so dass F genau dann erfüllbar ist, wenn eine Färbung der geforderten Art möglich ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Gefragt ist eine Formalisierung in **Aussagenlogik**, nicht in **Prädikatenlogik**. Für jedes Land i gibt es drei AL-Variablen R_i, G_i, B_i . Nun muss für einen gegebenen Graphen formalisiert werden, dass

1. Jedes Land mindestens 1 Farbe hat,
2. jedes Land höchstens 1 Farbe hat und
3. benachbarte Länder nicht dieselbe Farbe haben.

$$\begin{aligned}
 F = & \quad \{R_i \vee G_i \vee B_i : 0 \leq i < L\} \\
 & \cup \{(\neg R_i \vee \neg G_i) \wedge (\neg G_i \vee \neg B_i) \wedge (\neg B_i \vee \neg R_i) : 0 \leq i < L\} \\
 & \cup \{(\neg R_i \vee \neg R_j) \wedge (\neg G_i \vee \neg G_j) \wedge (\neg B_i \vee \neg B_j) : 0 \leq i, j < L, Na(i, j)\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

- (a) Wenn jeder arme Mensch einen reichen Vater hat, dann gibt es einen reichen Menschen, der einen reichen Großvater hat.
- (b) In einer Bar gibt es stets eine Person P , so daß, falls P etwas trinkt, alle anwesenden Personen etwas trinken.
- (c) Jeder Barbier rasiert alle Personen, außer denen, die sich selbst rasieren.

Lösung zu Aufgabe 3

- (a) Die Signatur besteht hier aus den einstelligen Funktionssymbolen *vater*, *mutter* sowie dem einstelligen Prädikatsymbol *reich* mit der ihres Namens entsprechenden Bedeutung. Die Bedeutung von *arm* ist in diesem Kontext als Negation des Prädikats *reich* definiert. Damit ergibt sich als Formalisierung der obigen Aussage:

$$\forall x (\neg \text{reich}(x) \rightarrow \text{reich}(\text{vater}(x))) \rightarrow \exists x (\text{reich}(x) \wedge (\text{reich}(\text{vater}(\text{vater}(x))) \vee \text{reich}(\text{vater}(\text{mutter}(x))))))$$

- (b) Diese Aussage ist auch als Trinker-Paradoxon bekannt und wird durch folgende allgemeingültige Formel beschrieben:

$$\exists x (\text{trinkt}(x) \rightarrow \forall y \text{trinkt}(y))$$

- (c) Die wörtliche Übersetzung liefert hier die erfüllbare Formel:

$$\forall x (\text{barbier}(x) \rightarrow \forall y \neg \text{rasiert}(y, y) \leftrightarrow \text{rasiert}(x, y))$$

In der Literatur ist eine andere Version dieser Aussage als Barbier-Paradoxon bekannt und lautet als Rätsel etwa wie folgt:

Der Barbier zeichnet sich dadurch aus, dass er genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasierst der Barbier sich selbst?

Diese Formulierung fordert, im Gegensatz zur Aufgabenstellung, die Existenz eines solchen Barbiers, so dass sich nun als Formalisierung des Rätsels die unerfüllbare Formel

$$\forall y \neg \text{rasiert}(y, y) \leftrightarrow \text{rasiert}(b, y)$$

ergibt. Dabei ist *b* eine Konstante, die den Barbier bezeichnet.

Eine alternative Formalisierung ist auch:

$$\exists z \text{barbier}(z) \wedge \forall x (\text{barbier}(x) \rightarrow \forall y \neg \text{rasiert}(y, y) \leftrightarrow \text{rasiert}(x, y))$$