Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 29.11.2013 besprochen.

Aufgabe 1

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so dass gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so dass gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurden die beiden Interpretationen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ der Signatur, die $+, *$ (Funktionssymbole) und $\leq$ (Prädikatsymbol) enthält, vorgestellt.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ erfüllt sind oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $\forall y(\exists k_1(2 * k_1 \doteq y) \to \exists k_2(2 * k_2 \doteq y + 2))$

(b) $\forall x(0 \leq x \to x \leq x * 2)$

(c) $\exists x \forall y(x \leq y)$

Aufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(a) $\phi_a = \exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$

(b) $\phi_b = \forall x(f(x) \doteq c) \to f(f(f(c))) \doteq c$

(c) $\phi_c = \forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$

(d) $\phi_d = \forall x((p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge p(x) \doteq q(x)) \to q(x) \doteq \mathbf{1})$

(e) $\phi_e = ((r \to s) \to r) \to (r \to (s \to r))$

Bemerkung: p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f, g Funktionssymbole (jeweils mit der richtigen Stelligkeit), c ein Konstantensymbol (nullstelliges Funktionssymbol) und x, y sind Variablen. Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.

Aufgabe 4

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.61 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

(a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so dass Folgendes gilt:

  (i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,

  (ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,

  (iii) $G \to G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.

(b) Zeigen Sie, dass $G_{\text{sko}} \to G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Aufgabe 5

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) zunächst die Pränex-Normalform und dann die Skolem-Normalform.

(a) $(\forall x\ p(x) \to \forall x\ q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x))$

(b) $\exists x(\forall y\ p(x,y) \vee \exists z(p(x,z) \wedge \forall x\ p(z,x)))$

(c) Geben Sie eine Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer Lösung zu (a) nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Aufgabe 6

Finden Sie eine Formel φ der Prädikatenlogik erster Stufe mit leeren Vokabular, so daß $M \models \varphi$ genau dann gilt, wenn M genau drei Elemente hat. Die Formel φ enthält also als einziges Relationszeichen das Symbol $\doteq$ für die Gleichheit.