Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 12

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 07.02.2014 besprochen.

Im Folgenden wird der Operator **V** verwendet, wie er in der Vorlesung definiert wurde. Dieser Operator wird bisweilen auch **Release-Operator** genannt, weil die Semantik von $A \mathbf{V} B$ gerade ist, dass B gelten muss, bis A gilt, also A löst B ("A releases B").

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende LTL-Formeln in allen ω-Strukturen gelten. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $(A \vee B)\,\mathbf{U}\,C \;\leftrightarrow\; (A\,\mathbf{U}\,C) \vee (B\,\mathbf{U}\,C)$

(b) $A\,\mathbf{V}\,(B \wedge C) \;\rightarrow\; (A\,\mathbf{V}\,B) \wedge (A\,\mathbf{V}\,C)$

(c) $(A\,\mathbf{V}\,B) \wedge (A\,\mathbf{V}\,C) \;\rightarrow\; A\,\mathbf{V}\,(B \wedge C)$

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Diese Aussage gilt nicht in allen ω-Strukturen.

Gegenbeispiel:

$$\xi(0) = \{A\}, \quad \xi(1) = \{B\}, \quad \xi(2) = \{C\}$$

Dann gilt:

$$\xi \models (A \vee B)\,\mathbf{U}\,C \text{ aber weder } \xi \models A\,\mathbf{U}\,C \text{ noch } \xi \models B\,\mathbf{U}\,C$$

(b) + (c) gilt.

Sei ξ beliebige ω-Struktur, dann gilt:

$\xi \models A\,\mathbf{V}\,(B \wedge C)$	gdw.	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi_n \models B \wedge C$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$.
	gdw.	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: ($\xi_n \models B$ und $\xi_n \models C$) oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$.
	gdw.	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: ($\xi \models B$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$) und ($\xi \models C$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$).
	gdw.	(Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi \models B$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$), und (für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi \models C$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ mit $\xi_k \models A$).
	gdw.	$\xi \models (A\,\mathbf{V}\,B) \wedge (A\,\mathbf{V}\,C)$

$$
\begin{array}{rcl}
V & = & \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}\} \\
P & = & \{\{p\}, \{p,q\}\} \\
\overline{P} & = & \{\emptyset, \{q\}\} \\
Q & = & \{\{q\}, \{p,q\}\} \\
\overline{Q} & = & \{\emptyset, \{p\}\} \\
PQ & = & \{\{p,q\}\}
\end{array}
$$

Abbildung 1: Mengenschreibweise

Aufgabe 2

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{p, q\}$. Geben Sie für die folgenden LTL-Formeln φ je einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}_\varphi$ über dem Alphabet $V = \mathbb{P}(\Sigma)$ an[1], so dass $L^\omega(\mathcal{A}_\varphi) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \varphi\}$ gilt. Sie können die Mengenschreibweise aus Abb. 1 verwenden.

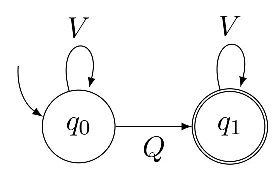
(a) $\varphi_a = \Diamond(p\,\mathbf{U}\,q)$

(b) $\varphi_b = \Box(p\,\mathbf{V}\,q)$

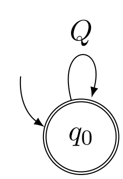
(c) $\varphi_c = \Diamond\Box p \rightarrow \Diamond\Box q$

Lösung zu Aufgabe 2

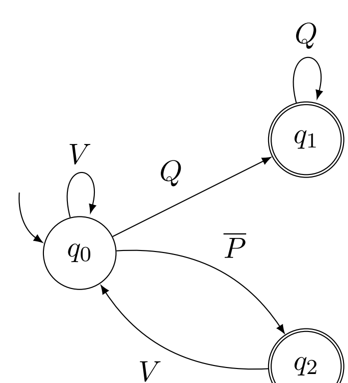
(a) Beobachtung: $\Diamond(p\,\mathbf{U}\,q)$ ist äquivalent zu $\Diamond q$



(b) Beobachtung: $\Box(p\,\mathbf{V}\,q)$ ist äquivalent zu $\Box q$



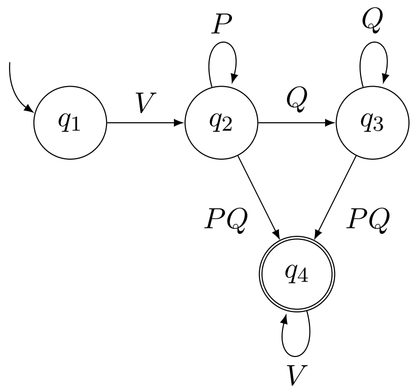
(c) Beobachtung: φ_c ist erfüllt, wenn q ab einem Zeitpunkt immer gilt, oder wenn $\neg p$ unendlich oft gilt.



Aufgabe 3

Seien Σ und V wie in Aufgabe 2 und der folgende Automat $\mathcal{B}$ gegeben. Die Mengenschreibweise ist in Abb. 1 definiert. Geben Sie eine LTL-Formel ψ an, so dass $L^\omega(\mathcal{B}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \psi\}$ gilt.

[1]$\mathbb{P}(S)$ steht hier für die Potenzmenge von S.



Lösung zu Aufgabe 3

$$\psi = \mathbf{X}(p\, \mathbf{U}\, (q\, \mathbf{U}\, (p \wedge q))$$

Aufgabe 4

Seien Σ und V wie in Aufgabe 2, und die Mengenschreibweise wie in Abb. 1.

Eine omega-Struktur heißt **schwach fair**, falls gilt: Wenn von einem Zeitpunkt an p immer gilt, dann wird q unendlich oft wahr.

(a) Geben Sie eine LTL-Formel χ_1 an, so dass χ_1 in einer omega-Struktur $K = (\mathbb{N}, <, \xi)$ genau dann wahr ist, wenn K schwach fair ist.

(b) Geben Sie einen Büchiautomaten $\mathcal{A}_{\chi_1}$ über V an, so dass $L^\omega(\mathcal{A}_{\chi_1}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \chi_1\}$ gilt.

Eine omega-Struktur heißt **(stark) fair**, falls gilt: Wenn von einem Zeitpunkt an p unendlich oft gilt, dann wird q unendlich oft wahr.

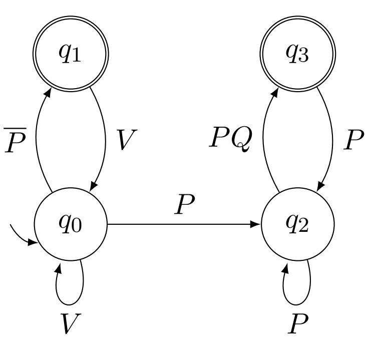
(c) Geben Sie eine LTL-Formel χ_2 an, so dass χ_2 in einer omega-Struktur $K = (\mathbb{N}, <, \xi)$ genau dann wahr ist, wenn K fair ist.

(d) Geben Sie einen Büchiautomaten $\mathcal{A}_{\chi_2}$ über V an, so dass $L^\omega(\mathcal{A}_{\chi_2}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \chi_2\}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) $\chi_1 = \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond q$

(b)



(c) $\chi_2 = \Box\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond q$

(d)