Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

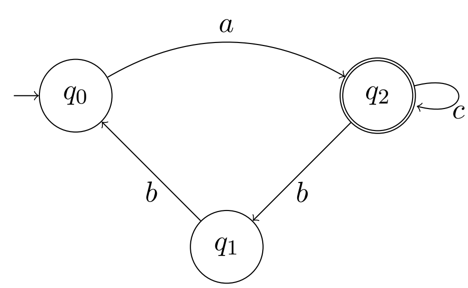
Lösungen zu Übungsblatt 11

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 07.02.2014 besprochen.

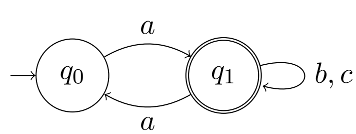
Aufgabe 1

Geben Sie für jeden der folgenden Büchi-Automaten jeweils die ω-Sprache L^ω, die von ihm akzeptiert wird, als ω-regulären Ausdruck[1] an.

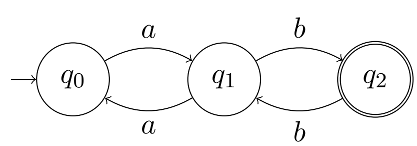
(a)



(b)



(c)



[1] Siehe Definitionen 10.36 und 10.37 im Skriptum.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) $L^\omega = a(bba + c)^\omega$

(b) $L^\omega = a(aa + b + c)^\omega$

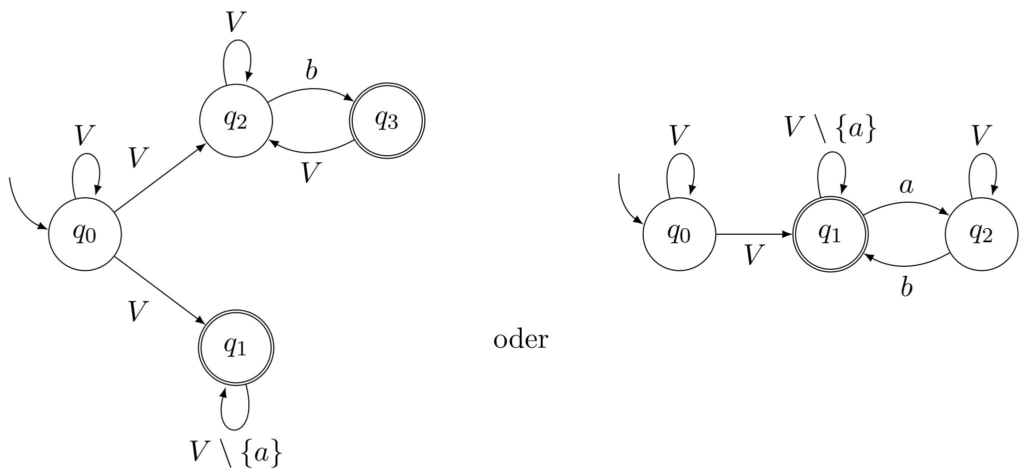
(c) $L^\omega = a((aa)^* bb)^\omega$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein endliches Alphabet V, das wenigstens die beiden Buchstaben a und b enthält. Geben Sie einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ an, so dass $L^\omega(\mathcal{B}) = L_{a\omega\to b\omega}$, mit

$$L_{a\omega\to b\omega} := \{v \in V^\omega \mid \text{wenn } a \text{ in } v \text{ unendlich oft vorkommt, dann kommt auch } b \text{ in } v \text{ unendlich oft vor}\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2



Bei dem linken Automaten z.B. muss man sich an einem Punkt (indeterministisch) für einen der beiden "Pfade" entscheiden: In q_1 werden alle ω-Wörter, die ab einer Stelle kein a mehr enthalten (also insgesamt nur endlich viele a), akzeptiert, während in dem von q_2 und q_3 aufgespannten Teil die Wörter akzepiert werden, in denen b unendlich oft auftritt. Die Aussage „w enthält endlich viele a oder unendlich viele b" ist äquivalent zu „Wenn w unendlich viele a enthält, dann auch unendlich viele b".

Aufgabe 3

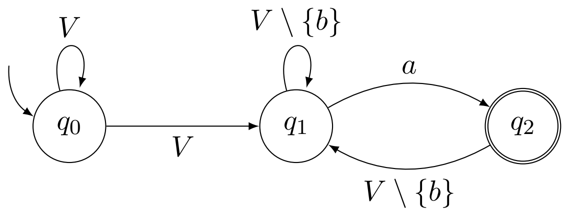
Geben Sie einen Büchi-Automaten $\mathcal{C}$ an, so dass $L^\omega(\mathcal{B}) = V^\omega \setminus L_{a\omega\to b\omega}$, der also das Komplement von $L_{a\omega\to b\omega}$ akzeptiert.

Lösung zu Aufgabe 3

Die komplementäre Sprache lautet:

$$V^\omega \setminus L_{a\omega\to b\omega} = \{w \in V^\omega : w \text{ enthält unendlich viele } a, \text{ aber } b \text{ kommt nur endlich oft vor.}\}$$

Ein möglicher Büchi-Automat $\mathcal{C}$ ist der folgende:



Aufgabe 4 **(Bonusaufgabe)**

Seien A_1, A_2 endliche (nicht notwendigerweise deterministische) Automaten über dem Alphabet V. Zeigen Sie durch Angabe von Gegenbeispielen, dass folgende Aussagen im Allgemeinen nicht gelten:

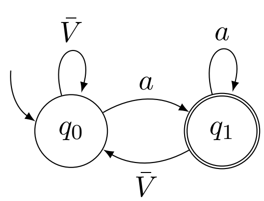
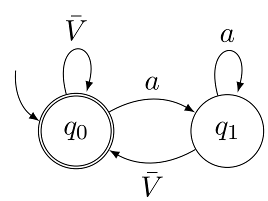
(a) $L(A_1) = V^* \setminus L(A_2)$ impliziert $L^\omega(A_1) = V^\omega \setminus L^\omega(A_2)$.

(b) $L^\omega(A_1) = V^\omega \setminus L^\omega(A_2)$ impliziert $L(A_1) = V^* \setminus L(A_2)$.

Hinweis: Für jeden Automaten sind zwei Zustände ausreichend.

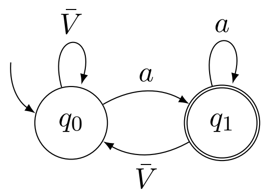
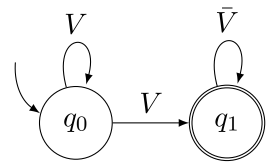
Lösung zu Aufgabe 4

Definiere: $\bar{V} = V \setminus \{a\}$

(a)	Automat A_1	Automat A_2
Automaten		
Reguläre Sprache	$L_1 = V^*a$	$L_2 = (V^*\bar{V}) = V^* \setminus L_1$
ω-Sprache	$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\} = (V^*a)^\omega$	$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : w \text{ endet nicht mit } a^\omega\} = V^\omega \setminus (V^*a^\omega)$

L_1^ω und L_2^ω sind nicht zu einander komplementär: Das Wort $w = abababab...$ liegt im Schnitt.

(b)

<table>
<tr><td></td><td>Automat A_1</td><td>Automat A_2</td></tr>
<tr><td>Automaten</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Reguläre Sprache</td><td>$L_1 = V^*a$</td><td>$L_2 = V^*V\bar{V}^*$</td></tr>
<tr><td>ω-Sprache</td><td>$L_1^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ unendlich oft in } w\}$</td><td>$L_2^\omega = \{w \in V^\omega : a \text{ nur endlich oft in } w\}$
$= V^\omega \setminus L_1^\omega$</td></tr>
</table>

L_1 und L_2 sind nicht zu einander komplementär. L_2 ist eine etwas kompliziert zu formulierende Sprache, aber man sieht leicht ein, dass $L_1 \neq V^* \setminus L_2$, z.B. durch das Wort a, welches sowohl in L_1 als auch in L_2 liegt; oder durch das leere Wort $\epsilon \in V^*$, welches weder in L_1 noch in L_2 liegt.