Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 10

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 24.01.2014 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie

  (i) $\rightarrow$ (die reflexive, transitive Hülle von $\succ$),

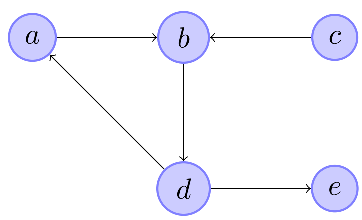
  (ii) $\overset{+}{\rightarrow}$ (die transitive Hülle von $\succ$) und

  (iii) $\leftrightarrow$ (die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$).

(b) Zeigen Sie, daß $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so daß sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Lösung zu Aufgabe 1



(a)

$$\text{Die transitive Hülle } \overset{+}{\rightarrow} = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e)\}\ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive Hülle } \rightarrow = \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),\\ (b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ (c,a),(c,b),\boldsymbol{(c,c)},(c,d),(c,e),\\ (d,a),(d,b),(d,d),(d,e),\\ \boldsymbol{(e,e)}\}\ .$$

$$\text{Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle } \leftrightarrow = \{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}\ .$$

(b) Die Knoten a, b, c, e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. $\succ$: an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e. Wegen $a \xrightarrow{+} e$ (s.o.) ist $\succ$ lokal konfluent.

Ebenfalls ist $\succ$ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a, b, d, e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

(c) Wir fügen einen neuen Knoten f, sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \xrightarrow{+} a \xrightarrow{+} f$ bleibt $\succ$ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \xrightarrow{+} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. $\succ$ haben.

Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

(a)	Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent?	Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent?
(b)	Ist $(N, \succ)$ konfluent?	Ist $(N', \succ)$ konfluent?
(c)	Ist $(N, \succ)$ noethersch?	Ist $(N', \succ)$ noethersch?
(d)	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Lösung zu Aufgabe 2

Betrachten wir zunächst nur $(N, \succ)$

(a) Es gilt:

$$6 \succ 2, \; 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

(b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.

(c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In $\mathbb{N}$ kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist $(N, \succ)$ noethersch.

(d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für $(N', \succ)$: 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in N'$.

(a) folgt aus (b).

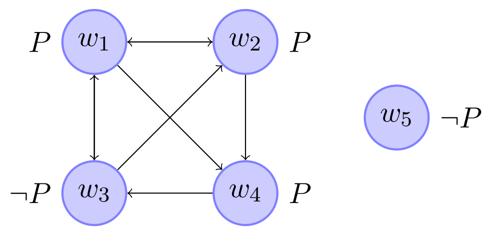
(b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.

(c) Das Argument von oben greift auch hier.

(d) 1 ist das einzig irreduzible Element.

Aufgabe 3

Gegeben sei die modallogische Signatur, die nur das Atom P beinhaltet, sowie folgende Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur:



(D.h., dass $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,

$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}$,

und für die Interpretation I gilt: $I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W$, $I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$.)

(a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.

(b) Die sogenannte *Extension* von ϕ (in der Struktur $\mathcal{K}$) ist $[\![\phi]\!] := \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$.
Bestimmen Sie für die Struktur $\mathcal{K}$: $[\![\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Diamond P]\!]$ und $[\![\Box\Box P]\!]$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Die Unterscheidungsformeln sind (eine Möglichkeit):

$$\phi_{w_5} = \Box \mathbf{0}$$

$$\phi_{w_4} = P \wedge \Box\neg P \qquad \phi_{w_3} = \neg P \wedge \Diamond P \qquad \phi_{w_2} = \Box P \wedge P \qquad \phi_{w_1} = \wedge_{i=w_2}^{w_5} \neg\phi_i$$

(b) Die Extensionen in diesem Modell sind:

$$[\![\Box P]\!] = \{w_2, w_3, w_5\} \qquad [\![\Diamond\Box P]\!] = \{w_1, w_3, w_4\}$$

$$[\![\Diamond\Diamond P]\!] = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \qquad [\![\Box\Box P]\!] = \{w_4, w_5\}$$

Aufgabe 4

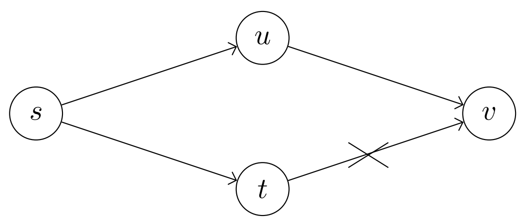
Kripke-Rahmen können eine Eigenschaft aufweisen, die ähnlich zur lokalen Konfluenz bei Termersetzungssystemen ist: Ein Kripke-Rahmen ist *schwach zusammenhängend* gdw für alle Zustände $x, y, z \in S$ gilt: falls $R(x, y)$ und $R(x, z)$, dann gibt es einen Zustand w, so dass $R(y, w)$ und $R(z, w)$.

Beweisen Sie, dass die Formel $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ die Klasse der schwach zusammenhängenden Kripke-Rahmen (S, R) charakterisiert.

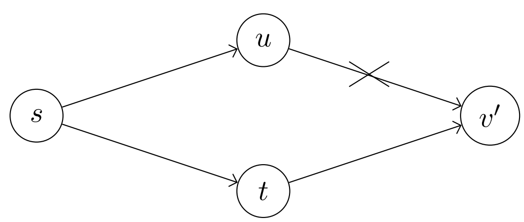
<u>Lösung zu Aufgabe 4</u>

- Gegeben sei ein nicht schwach zusammenhängender Kripke-Rahmen (S, R). Zu zeigen ist, dass $(S, R) \not\models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$. Dazu müssen wir zeigen, dass es ein I gibt mit $(S, R, I) \not\models \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$.

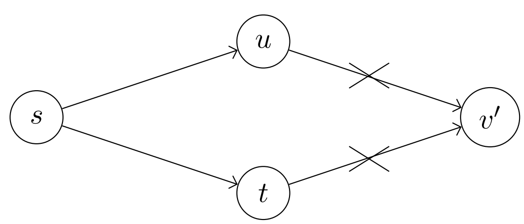
  Da (S, R) nicht schwach zusammenhängend ist, existieren $s, t, u \in S$ und eine Partition $S = V \cup V' \cup V''$ mit $\forall v \in V$:



  und $\forall v' \in V'$:



  und $\forall v'' \in V''$:



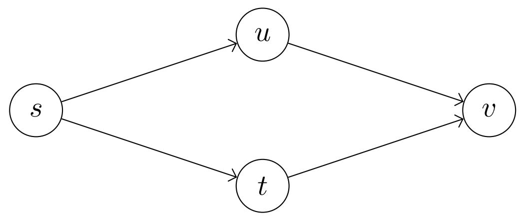
  D.h. also $\forall v \in V : R(u, v)$ und nicht $R(t, v)$, sowie $\forall v' \in V' : R(t, v')$ und nicht $R(u, v')$, sowie $\forall v'' \in V'' :$ weder $R(t, v'')$ noch $R(u, v'')$.

  Wir betrachten eine Struktur (S, R, I) mit $I(v, A) = W$ gdw $v \in V$. Damit gilt:

$$\begin{array}{rcll} s & \models & \Diamond\Box A & \\ t & \not\models & \Diamond A & \\ \text{und damit } s & \not\models & \Box\Diamond A & \quad \text{Widerspruch zur Annahme!} \end{array}$$

  Diese Argumentation gilt auch, falls eine oder zwei Mengen aus $\{V, V', V''\}$ leer sind.

- Sei nun (S, R) schwach zusammenhängend. Zu zeigen ist, dass $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ in allen Kripkestrukturen (S, R, I) gilt.



In einem beliebigen Zustand $s \in S$ gelte $s \models \Diamond\Box A$, d.h., es existiert ein $u \in S$ mit $R(s,u)$ und $u \models \Box A$. Es ist nun zu zeigen, dass $s \models \Box\Diamond A$. Sei $t \in S$ ein beliebiger Zustand mit $R(s,t)$. Weil (S,R) schwach funktional ist, gibt es einen Zustand $v \in S$ mit $R(u,v)$ und $R(t,v)$. Aus $u \models \Box A$ folgt: $v \models A$ und damit gilt $t \models \Diamond A$. Da t beliebig war, folgt $s \models \Box\Diamond A$.