Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 07.11.2013 besprochen.

Aufgabe 0

Melden Sie sich bei unserem Forum an (unter `http://i12www.ira.uka.de/~farago/fsforum/`) und machen sich mit den Funktionen des Forums vertraut. Im Forum können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, welche von Ihren Kommilitonen und uns gelesen und beantwortet werden. Bitte beachten Sie, das die Praxisaufgaben eigenständig bearbeitet werden müssen und in sofern insbesondere keine (Teil-)Lösungen zu den Praxisaufgaben im Forum gepostet werden dürfen.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist, indem Sie ein Modell angeben.

$$((A \to (A \land \neg A)) \lor (A \leftrightarrow B)) \to B$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(\neg A \land (A \lor \neg A)) \land (\neg(A \leftrightarrow B) \land \neg B)$$

(c) Überprüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(ii) $(A \land \neg A \to B) \land C$

Aufgabe 2

Geben Sie zwei Formeln A und B so an, dass $A \to B$ eine Tautologie ist und dass es mindestens zwei verschiedene Interpolanten für $A \to B$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel zwei verschiedene Interpolanten an und zeigen Sie, dass diese tatsächlich Interpolanten von $A \to B$ sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

Sind C_1 und C_2 Interpolanten für die Implikation $A \to B$, dann sind auch $C_1 \lor C_2$ und $C_1 \land C_2$ Interpolanten für $A \to B$.

Aufgabe 4

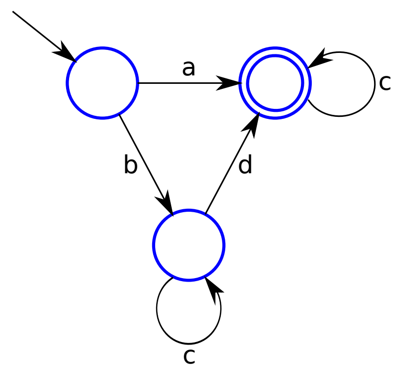
Sei $A \to B$ eine Tautologie.
Seien $Q_1, \ldots, Q_k$ alle Variablen in B, die nicht in A vorkommen. Sind c_i Konstanten aus $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ dann bezeichne $B[c_1, \ldots, c_k]$, wie im Beweis von Lemma 2.22 aus dem Skriptum, die Formel, die aus B entsteht, wenn man alle Vorkommen von Q_i durch c_i ersetzt. Außerdem sei:

$$D \equiv \bigwedge_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} B[c_1, \ldots, c_n]$$

Zeigen Sie, daß D eine Interpolante von $A \to B$ ist.

Aufgabe 5

Geben sei nebenstehender Automat.



Die Zustände in diesem Automaten sind aussagenlogische Interpretationen über der Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$. Die Zustandsübergänge des Automaten sind mit Aktionen a, b, c und d annotiert, welche beschreiben, wie sich eine Interpretation beim Übergang von einem Zustand in den nächsten ändert. Für unseren Automaten sind die Aktionen folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
a &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(\neg P_2), I'(P_3) = I(P_3)\\
b &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(\neg P_2), I'(P_3) = I(\neg P_3)\\
c &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(P_2), I'(P_3) = I(P_3)\\
d &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(P_2), I'(P_3) = I(\neg P_3)
\end{aligned}$$

Für jede Aktion definieren wir eine Formel, die den jeweiligen Zustandsübergang beschreibt. Dazu führen wir zu jeder aussagenlogischen Variable P_i eine gestrichene Version P_i' ein, welche den Wert von P_i im Folgezustand beschreibt:

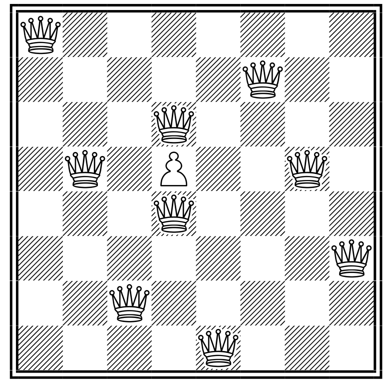
$$\begin{aligned}
f_a(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv \quad P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow \neg P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow P_3\\
f_b(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv \quad P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow \neg P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow \neg P_3\\
f_c(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv \quad P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow P_3\\
f_d(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv \quad P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow \neg P_3
\end{aligned}$$

Gelte nun im Startzustand $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$.

(a) Geben Sie eine Formel an, die beschreibt, welche Zustände nach zwei Schritten erreicht werden können.

(b) Zeigen Sie, dass in allen Zuständen, die nach zwei Schritten erreicht werden können, $P_1 \wedge \neg P_2$ gilt.

Aufgabe 6



Eine Abwandlung des sogenannten *8-Damen-Problems* (siehe Skriptum) ist das *9-Damen-Problem*: Es geht darum, neun Damen so auf einem üblichen Schachbrett zu plazieren, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Bei 9 Damen ist dies jedoch nur möglich, wenn sich zusätzlich ein Bauer auf dem Brett befindet. Steht der Bauer auf gerader Linie zwischen zwei Damen, so bedrohen sich diese nicht. Eine mögliche Lösung des Problems zeigt die Abb. rechts.

Formalisieren Sie das 9-Damen-Problem als ein Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Orientieren Sie sich dabei an der Lösung des 8-Damen-Problems aus dem Skriptum.