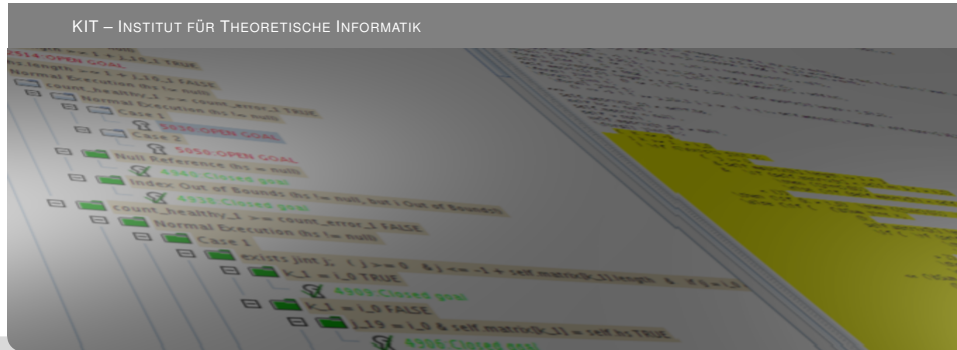


# Formale Systeme

Büchi-Automaten

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Büchi-Automaten

## Einführung

## Definition

Sei  $V$  ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus  $V$ .

$$w(n)$$

bezeichnet den  $n$ -ten Buchstaben in  $w$  und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück  $w(0) \dots w(n)$  von  $w$ .

Wir nennen ein Wort  $w \in V^\omega$  manchmal auch ein  $\omega$ -Wort über  $V$ .

Man kann ein unendliches Wort  $w \in V^\omega$  auch als eine Funktion  $w : \mathbb{N} \rightarrow V$ , von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Das leere Wort  $\varepsilon$  kommt **nicht** in  $V^\omega$  vor.

# Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei  $K \subseteq V^*$  und  $J \subseteq V^\omega$ :

1.  $K^\omega$  bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form

$$w_1 \dots w_i \dots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$

- 2.

$$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$

- 3.

$$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

Manche Autoren benutzen  $\lim(K)$  anstelle von  $\vec{K}$ .

## Definition

Sei  $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$  ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein  $\omega$ -Wort  $w \in V^\omega$  nennen wir eine Folge  $s_0, \dots, s_n, \dots$  eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für  $w$ , wenn für alle  $0 \leq n$ :

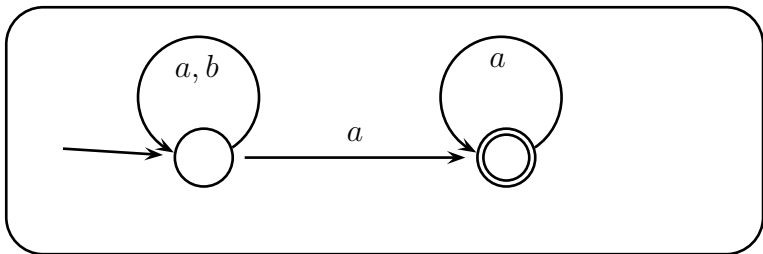
$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Die von  $\mathcal{A}$  akzeptierte  $\omega$ -Sprache ist:

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen} \}$$

Der einzige Unterschied zwischen Büchi-Automaten und (normalen) endlichen Automaten liegt in der Akzeptanzdefinition.

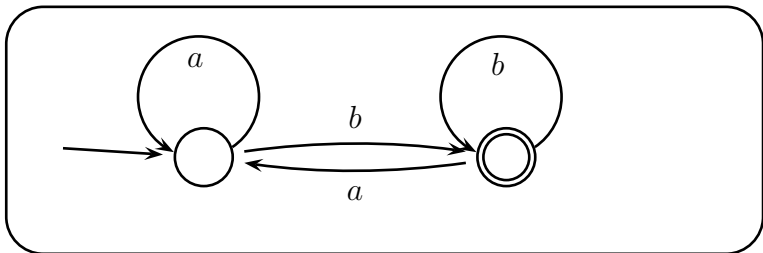
# Beispiel 1



Die akzeptierte Sprache ist

$$\{a, b\}^* a^\omega$$

## Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^*b)^\omega$$

$$\{w \in \{a, b\}^\omega \mid b \text{ kommt unendlich oft vor in } w\}$$

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten  $\mathcal{B}$  die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

**Beweis:**

Um  $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$  zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand  $q_f \in F$  finden, der auf einer Schleife liegt.

Wir nennen eine Menge  $L$  von  $\omega$ -Wörtern  **$\omega$ -regulär**, wenn es einen Büchi-Automaten  $\mathcal{A}$  gibt mit  $L^\omega(\mathcal{A}) = L$ .



## Lemma

Sei  $\mathcal{A}$  ein endlicher Automat und  $K = L(\mathcal{A})$ . Dann gilt

1.  $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls  $\mathcal{A}$  deterministisch ist gilt sogar  $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

### Beweis zu 1:

Für  $w \in L^\omega(\mathcal{A})$  gibt es eine Berechnungsfolge

$\rho_w = s_0, s_1 \dots s_n \dots$ , so daß  $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$  unendlich ist.

Für alle  $n \in F_w$  gilt  $s_n \in F$

$\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$ .

Also  $w \in \vec{K}$ .

## Lemma

Sei  $\mathcal{A}$  ein endlicher Automat und  $K = L(\mathcal{A})$ . Dann gilt

1.  $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls  $\mathcal{A}$  deterministisch ist gilt sogar  $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

### Beweis zu 2:

Für  $w \in \vec{K}$  ist  $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$  unendlich.

Für jedes  $n \in R_w$  gibt es eine Berechnungsfolge

$s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,n}$  für  $w \downarrow (n)$ .

Da  $\mathcal{A}$  deterministisch ist, ist für jedes Paar  $n, m \in R_w$  mit  $n < m$   $s_n$  Anfangsstück von  $s_m$ .

Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge  $s$  für  $w$ , die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.

Also  $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ .

### Korollar

Für eine  $\omega$ -Sprache  $L \subseteq V^\omega$  sind äquivalent:

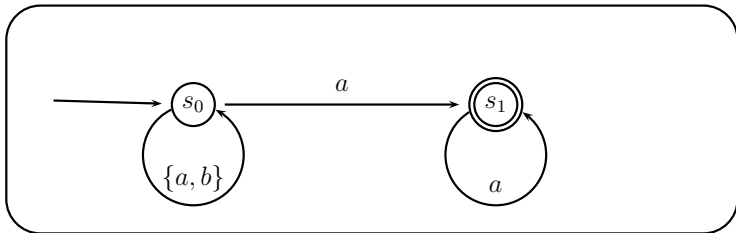
- ▶  $L = L^\omega(\mathcal{A})$  für einen deterministischen Büchi-Automaten
- ▶ es eine reguläre Sprache  $K \subseteq V^*$  gibt mit  $L = \vec{K}$ .

### Beweis:

Folgt direkt aus der Tatsache, daß für deterministische Automaten  $\mathcal{A}$

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{L(\mathcal{A})}$$

gilt (vorangegangenes Lemma).



$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } b \text{ nur endlich oft vor}\}$

$L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } a\}$ .

$Lim(L(N_{bfin})) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } a \text{ unendlich oft vor}\}$ .

Man sieht leicht, daß  $L^\omega(N_{bfin}) \neq Lim(L(N_{bfin}))$

## Korollar

Es gibt Sprachen  $L \subseteq V^\omega$ , die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

### Beweis:

Wir wählen  $V = \{a, b\}$  und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen  $L = \vec{K}$  für eine reguläre Menge  $K \subseteq V^*$ .

Es gibt ein  $k_1 > 0$  mit  $a^{k_1} \in K$ , da  $a^\omega \in L$ .

Dann gibt es auch ein  $k_2 > 0$  mit  $a^{k_1} b a^{k_2} \in K$ , weil  $a^{k_1} b a^\omega \in L$ .

So fortfahrend gibt es  $k_i > 0$  für alle  $i$  mit  $a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_i} \in K$ .

Wegen  $L = \vec{K}$  folgt daraus auch  $a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_i} b \dots \in L$

im Widerspruch zur Definition von  $L$ .

Sind  $L_1, L_2$   $\omega$ -reguläre Sprachen und ist  $K$  eine reguläre Sprache, dann ist auch

1.  $L_1 \cup L_2$   $\omega$ -regulär,
2.  $K^\omega$   $\omega$ -regulär, falls  $\varepsilon \notin K$ ,
3.  $KL_1$   $\omega$ -regulär,
4.  $V^\omega \setminus L_1$   $\omega$ -regulär,
5.  $L_1 \cap L_2$   $\omega$ -regulär.

# Beweis

Abschlossenheit unter  $\cup$

Seien  $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$  für  $i = 1, 2$  Büchi-Automaten und  $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$ .

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten  $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$ , wobei  $s_0$  ein neuer Zustand ist, der weder in  $Q_1$  noch in  $Q_2$  vorkommt.

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} \\
 \delta(q, a) &= \delta_i(q, a) && \text{falls } q \in Q_i \\
 \delta(s_0, a) &= \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) \\
 F &= F_1 \cup F_2
 \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß  $L^\omega(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$ .

Der Automaten  $\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$  sei definiert durch:

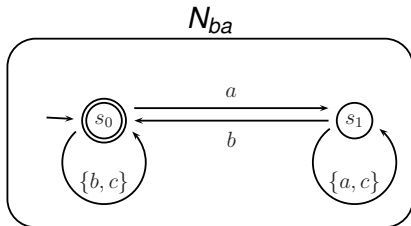
$$\begin{aligned} Q_B &= Q_A \\ s_0^B &= s_0^A \\ \delta_B(q, a) &= \delta_A(q, a) \quad \text{falls } q \in Q_B \\ \delta_B(q, \epsilon) &= \{s_0^B\} \quad \text{falls } q \in F_A \\ F_B &= \{s_0^B\} \end{aligned}$$

Wir können annehmen, daß für alle  $q \in F_A$  und alle  $x \in \Sigma$  gilt:

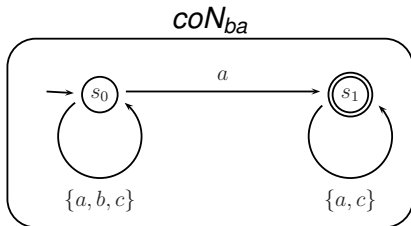
$$s_0^A \notin \delta_A(q, x).$$



# Beispiel zur Komplementbildung



$$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid \text{nach jedem } a \text{ kommt ein } b\}$$



Die Abgeschlossenheit  
 $\omega$ -regulärer Mengen  
unter Komplementbildung  
muß noch bewiesen werden.  
(Siehe Skriptum)

# Zerlegungssatz

## Satz

$L \subseteq V^\omega$  ist  $\omega$ -regulär, genau dann, wenn  $L$  eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$JK^\omega$$

für reguläre Mengen  $J, K \subseteq V^*$  ist, wobei  $\varepsilon \notin K$ .

### Beweis:

Sei  $A = (Q, V, s_0, \delta, F)$  ein Büchi-Automat mit  $L^\omega(A) = L$ .

Für  $p, q \in Q$  sei  $L_{p,q} = \{w \in V^* \mid q \in \delta(p, w)\}$ . Jedes  $L_{p,q} \subseteq V^*$  ist eine reguläre Menge. Außerdem gilt

$$L = \bigcup_{p \in F} L_{s_0,p} L_{p,p}^\omega.$$

Die umgekehrte Implikation folgt aus den Abschlusseigenschaften.

# Varianten von Büchi-Automaten

Menge von Anfangszuständen

## Lemma

Zu jedem Büchi-Automaten  $\mathcal{C} = (S, V, S_0, \delta, F)$  mit einer Menge von Anfangszuständen gibt es einen Büchi-Automaten  $\mathcal{A}$  mit einem einzigen Anfangszustand und

$$L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A})$$

### Beweis:

Sei  $S_0 = \{s_1, \dots, s_k\}$ .

Wir setzen  $\mathcal{C}_i = (S, V, s_i, \delta, F)$ .

Offensichtlich gilt  $L^\omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^k L^\omega(\mathcal{C}_i)$ .

Die Existenz von  $\mathcal{A}$  folgt jetzt aus dem Beweis der Abgeschlossenheit  $\omega$ -regulärer Mengen unter Vereinigung.

Ein  $\omega$ -Wort  $w$  wird von dem erweiterten Büchi-Automat

$$\mathcal{A} = (\mathcal{S}, V, s_0, \delta, F_1, \dots, F_n)$$

akzeptiert, wenn es eine Berechnungsfolge  $s$  für  $w$  gibt, die für jedes  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$  unendlich viele Zustände aus  $F_j$  enthält.

Also

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge } s \text{ für } w, \\ \text{so daß für jedes } j, 1 \leq j \leq n, \\ \text{die Menge } \{i \mid s_i \in F_j\} \text{ unendlich ist.}\}$$

### Lemma

Zu jedem erweiterten Büchi-Automaten  $\mathcal{A}_e$  gibt es einen einfachen Büchi-Automaten  $\mathcal{A}$  mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_e) = L^\omega(\mathcal{A})$$