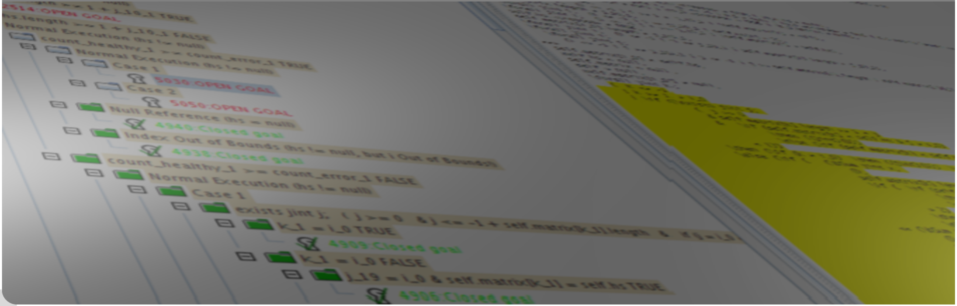
KIT Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Reduktionssysteme

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Termersetzungssysteme

Einstieg

Termersetzungssysteme sind eine sehr erfolgreiche Methode in der Gleichungslogik.

Aus einer Menge symmetrischer Gleichungen E wird ein gerichtetes *Termersetzungssystem*.

Die den Termersetzungssystemen zugrunde liegende Idee einer eindeutigen Normalform und die schrittweise Normalisierung eines symbolischen Ausdrucks ist so elementar, daß sie in vielen Zusammenhängen in unterschiedlichen Ausprägungen eine Rolle spielt.

Der übergreifende Begriff sind die *Reduktionssysteme*.

Reduktionssysteme

Definition

Ein **Reduktionssystem** $(D, \succ)$ besteht aus einer nichtleeren Menge D und einer beliebigen, binären Relation $\succ$ auf D.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

$\rightarrow$	die reflexive, transitive Hülle von $\succ$
$\stackrel{+}{\rightarrow}$	die transitive Hülle von $\succ$
$\leftrightarrow$	die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \overset{1}{\to}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}
$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \overset{1}{\to}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}
$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$u * [(\,(a + c) + 2) * c\,] \quad \overset{1}{\to}_E \quad u * [(a + c) * c + 2 * c]$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \overset{1}{\rightarrow}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$\underbrace{u * [(\,(a + c) + 2) * c\,]}_{s} \quad \overset{1}{\rightarrow}_E \quad u * [(a + c) * c + 2 * c]$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \stackrel{1}{\rightarrow}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}
$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$
\underbrace{u * [(\,(a + c) + 2) * c\,]}_{s} \quad \stackrel{1}{\rightarrow}_E \quad \underbrace{u * [(a + c) * c + 2 * c]}_{t}
$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \xrightarrow{1}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}
$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$u * [(\underbrace{(a + c)}_{x} + 2) * c] \quad \xrightarrow{1}_E \quad u * [(a + c) * c + 2 * c]$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\
s \succ t & \Leftrightarrow & s \overset{1}{\to}_E t \\
 & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\
 & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\
 & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\
 & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\
 & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r)
\end{array}
$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$u * [(\underbrace{(a + c)}_{x} + \underbrace{2}_{y}) * c] \overset{1}{\to}_E u * [(a + c) * c + 2 * c]$$

Standardbeispiel

Gegeben sei eine Menge E von Gleichungen in der Signatur Σ
Das Reduktionssystem $(D, \succ)$ der Termersetzung bzgl E ist gegebn durch

$$\begin{array}{lcl} D & = & T_\Sigma \text{ alle } \Sigma - \text{ Terme} \\ s \succ t & \Leftrightarrow & s \overset{1}{\rightarrow}_E t \\ & \Leftrightarrow & \text{es gibt eine Gleichung } l \doteq r \in E \\ & & \text{und eine Substitution } \sigma, \text{ so daß gilt:} \\ & & \sigma(l) \text{ ist Unterterm von } s \\ & & t \text{ entsteht aus } s, \text{ indem dort der Unterterm } \sigma(l) \\ & & \text{an genau einer Stelle ersetzt wird durch } \sigma(r) \end{array}$$

Beispiel: $E = \{(x + y) * z = x * z + y * z\}$

$$u * [(\underbrace{(a + c)}_{x} + \underbrace{2}_{y}) * \underbrace{c}_{z}] \quad \overset{1}{\rightarrow}_E \quad u * [(a + c) * c + 2 * c]$$

Termersetzung

Für ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ wurden die abgeleiteten Relationen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ definiert.

Termersetzung

Für ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ wurden die abgeleiteten Relationen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ definiert.
Was bedeuten diese für $(D, \succ) = (T_\Sigma, \overset{1}{\rightarrow}_E)$?

Termersetzung

Für ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ wurden die abgeleiteten Relationen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ definiert.
Was bedeuten diese für $(D, \succ) = (T_\Sigma, \stackrel{1}{\rightarrow}_E)$?

$t \rightarrow_E r$	gdw	r wird durch mehrfache Anwendung von Gleichungen aus E von links nach rechts, erhalten

Termersetzung

Für ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ wurden die abgeleiteten Relationen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ definiert.
Was bedeuten diese für $(D, \succ) = (T_\Sigma, \overset{1}{\rightarrow}_E)$?

$t \rightarrow_E r$	gdw	r wird durch mehrfache Anwendung von Gleichungen aus E von links nach rechts, erhalten
$t \leftrightarrow_E r$	gdw	r wird durch mehrfache Anwendung von Gleichungen aus E in beiden Richtungen, erhalten

Weitere Beispiele für Reduktionssysteme

- Polynomreduktion

Weitere Beispiele für Reduktionssysteme

- Polynomreduktion
- β-Reduktion im λ-Kalkül

Weitere Beispiele für Reduktionssysteme

- Polynomreduktion
- β-Reduktion im λ-Kalkül
- Wortersetzung (Semi-Thue-Systeme)

Weitere Beispiele für Reduktionssysteme

- Polynomreduktion
- β-Reduktion im λ-Kalkül
- Wortersetzung (Semi-Thue-Systeme)
- etc

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \to s_1$, $s \to s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \to s_1$, $s \to s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$ existiert.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \to s_1$, $s \to s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch**.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \to s_1$, $s \to s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch.**
5. Ein Element $s \in D$ heißt **irreduzibel** (oder eine **Normalform**) in $(D, \succ)$, wenn kein $t \in D$ existiert mit $s \succ t$.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

Definition

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \to s_1$, $s \to s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch.**
5. Ein Element $s \in D$ heißt **irreduzibel** (oder eine **Normalform**) in $(D, \succ)$, wenn kein $t \in D$ existiert mit $s \succ t$.
6. Sei $s \in D$. Ein Element $s_0 \in D$ heißt eine **Normalform für s** in $(D, \succ)$, wenn s_0 irreduzibel ist und $s \to s_0$ gilt.

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*
2. *Für $s, t \in D$ gilt*

$$s \leftrightarrow t \text{ gdw } irr(s) = irr(t)$$

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*
2. *Für $s, t \in D$ gilt*

   $$s \leftrightarrow t \text{ gdw } irr(s) = irr(t)$$

3. *$(D, \succ)$ sei berechenbar im folgenden Sinne: Es gibt einen Algorithmus, der zu jedem $t \in D$ ein t' mit $t \succ t'$ liefert, wenn ein solches existiert, und andernfalls ausgibt „t ist irreduzibel", Dann ist die Relation $\leftrightarrow$ entscheidbar.*

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,
Setze $s_0 = s$ und wählen ein s_{i+1} mit $s_i \succ s_{i+1}$, solange s_i nicht irreduzibel ist.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \to s_1$ und $s \to s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \to t$ und $s_2 \to t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,
Setze $s_0 = s$ und wählen ein s_{i+1} mit $s_i \succ s_{i+1}$, solange s_i nicht irreduzibel ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, wird nach endlich vielen Schritten ein irreduzibles s_i erreicht.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.
Im Fall $s_0 \succ s_1$ gilt offensichtlich $irr(s_0) = irr(s_1)$, und wir sind fertig.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ gdw $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.
Im Fall $s_0 \succ s_1$ gilt offensichtlich $irr(s_0) = irr(s_1)$, und wir sind fertig.
Falls $s_1 \succ s_0$ gilt, folgt aus der Konfluenz, daß ebenfalls $irr(s_0) = irr(s_1)$ gelten muß.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel" mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel" mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.
Entsprechend erhält man $irr(t)$ aus t.

Beweis
Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel“ mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.
Entsprechend erhält man $irr(t)$ aus t.
Nach (2) ist $s \leftrightarrow t$ genau dann, wenn $irr(s) = irr(t)$.

Noethersche Induktion

Theorem

Für ein noethersches Reduktionssystem $(D, \succ)$ gilt das folgende Beweisprinzip der Noetherschen Induktion:
Es sei $X \subseteq D$, so daß für alle $a \in D$ gilt

$$\{b \mid a \succ b\} \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist $X = D$.

Noethersche Induktion

Proof.

Angenommen es gibt $a_0 \in D \backslash X$. Nach Annahme über X gilt $\{b \mid a_0 \succ b\} \not\subseteq X$.
Es gibt also ein a_1 mit
$$a_0 \succ a_1, a_1 \notin X$$
Nach Annahme über X gilt wieder $\{b \mid a_1 \succ b\} \not\subseteq X$ und es gibt ein a_2 mit
$$a_0 \succ a_1 \succ a_2, a_2 \notin X$$
Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man eine unendliche Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \succ a_{i+1}$ für alle i. Das ist ein Widerspruch, denn $(D, \succ)$ war als noethersch vorausgesetzt. $\square$

Von lokaler Konfluenz zu Konfluenz

Theorem

Wenn $(D, \succ)$ ein noethersches und lokal konfluentes Reduktionssystem ist, dann ist $(D, \succ)$ konfluent, d. h. kanonisch.

$$
\begin{tikzcd}
 & & s \arrow[dl, dotted, "\succ"'] \arrow[dr, dotted, "\succ"] & & \\
 & u_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & u_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
s_1 \arrow[dr] & & v \arrow[dl] & & s_2 \arrow[ddll] \\
 & w \arrow[dr] & & & \\
 & & t & &
\end{tikzcd}
$$

Beweis

Wir verwenden noethersche Induktion bezüglich der Menge

$$\begin{array}{lll} \mathit{Confl} & := & \{s \mid \text{für alle } s_1, s_2 \\ & & \text{mit } s \to s_1, s \to s_2 \\ & & \text{existiert ein } t \text{ mit } s_1 \to t, s_2 \to t\} \end{array}$$

Dazu müssen wir also zeigen, daß für alle s gilt:

$$\{s' \mid s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

Es seien s, s_1, s_2 gegeben mit $s \to s_1$, $s \to s_2$.

Im Falle $s = s_1$ oder $s = s_2$ ist man fertig. (Etwa: $s_1 = s \to s_2$).

Sei also $s \neq s_1$, $s \neq s_2$.

Beweis (Forts.)

Nachweis von

$$\{s' \mid s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

im Falle $s \to s_1$, $s \to s_2$ mit $s \neq s_1$, $s \neq s_2$.

Es existieren u_1, u_2 mit $s \succ u_1 \to s_1$ und $s \succ u_2 \to s_2$.

Wegen der lokalen Konfluenz von $(D, \succ)$ existiert ein v mit $u_1 \to v, u_2 \to v$.

Nach Voraussetzung („Induktionsannahme“) liegt u_1 in Confl. Also gibt es ein w mit $s_1 \to w$ und $v \to w$.

Entsprechend schließen wir aus der Induktionsannahme $u_2 \in$ Confl, daß ein Term t existiert mit $s_2 \to t$ und $w \to t$.

Wir haben $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$ und somit $s \in$ Confl, was zu beweisen war.