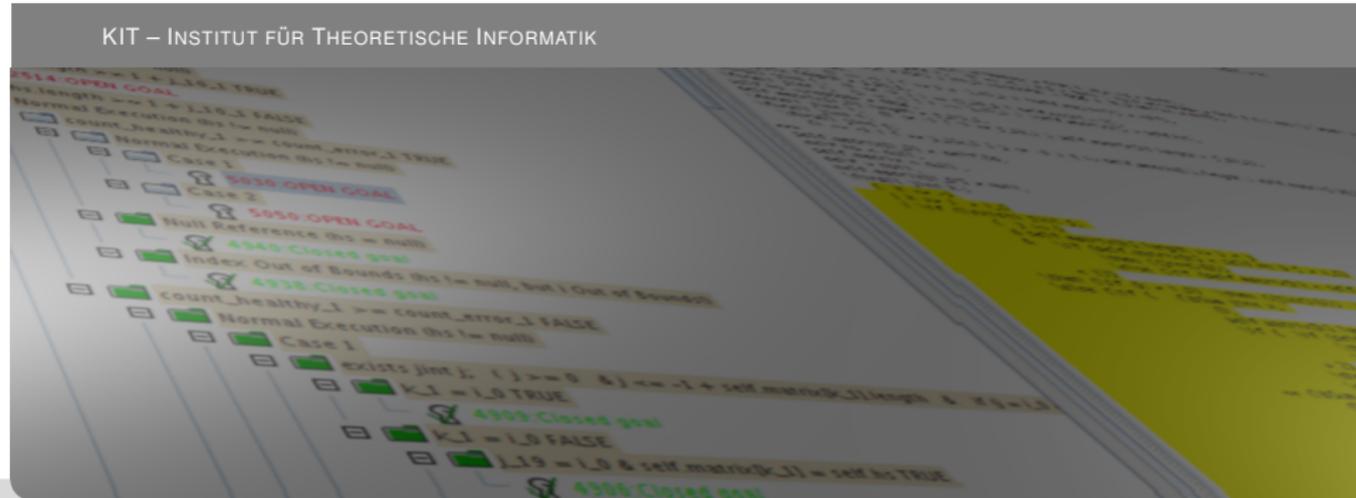


# Formale Systeme

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Peano Arithmetik



- ▶ Geboren 1858 in Spinetta
- ▶ Gestorben 1932 in Turin
- ▶ Beiträge zur Mathematik und Linguistik
- ▶ Eine zentrale Publikation:  
Arithmetices principia: nova methodo  
exposita  
erschienen 1889 im Verlag Augustae  
Taurinorum  
online Version <http://www.archive.org/stream/arithmeticespri00peangoog#page/n6/mode/2up>

## Signatur $\Sigma_{PA}$

- ▶ Konstantensymbole 0, 1 für *Null* und *Eins*
- ▶ zweistelliges Funktionszeichen für + für Addition
- ▶ zweistelliges Funktionszeichen für \* für Multiplikation

## Die Peano Axiome $PA$

1.  $\forall x(x + 1 \neq 0)$
2.  $\forall x \forall y(x + 1 \doteq y + 1 \rightarrow x \doteq y)$
3.  $\forall x(x + 0 \doteq x)$
4.  $\forall x \forall y(x + (y + 1) \doteq (x + y) + 1)$
5.  $\forall x(x * 0 \doteq 0)$
6.  $\forall x \forall y(x * (y + 1) \doteq (x * y) + x)$
7. Für jede  $\Sigma_{PA}$ -Formel  $\phi$   
 $\forall \bar{z}((\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x + 1))) \rightarrow \forall x(\phi))$

# Induktionsaxiom

Axiom 7 ist ein Axiomenschema.

## Beispiel

Für die Formel  $\phi = x + z \doteq z + x$  ergibt sich die Instanziierung des Induktionsschemas:

$$\begin{aligned}
 & \forall z( \\
 & \quad 0 + z \doteq z + 0 \wedge \\
 & \quad \forall x(x + z \doteq z + x \rightarrow (x + 1) + z \doteq z + (x + 1)) \\
 & \rightarrow \forall x(x + z \doteq z + x))
 \end{aligned}$$

- ▶ Induktionsvariable  $x$
- ▶ Parameter  $z$
- ▶ Induktionsanfang  $x = 0$
- ▶ Induktionsschritt  $x \rightsquigarrow x + 1$

Die folgenden beiden Formeln sind aus  $PA$  ableitbar:

1.  $\forall w(w + 0 \doteq 0 + w)$
2.  $0 \neq 1$

## Folgerung von 2. aus 1.

Aus Axiom 3  $\forall x(x + 0 \doteq x)$

- |   |                                   |                  |
|---|-----------------------------------|------------------|
| 1 | folgt für $x \rightsquigarrow 1$  | $1 + 0 \doteq 1$ |
| 2 | Teil 1 mit $w \rightsquigarrow 1$ | $0 + 1 \doteq 1$ |
|   | Axiom 1 $\forall x(x + 1 \neq 0)$ |                  |
| 3 | mit $x \rightsquigarrow 0$        | $0 + 1 \neq 0$   |
| 4 | aus 2 und 3 folgt                 | $1 \neq 0$       |

$$PA \vdash \forall w (w + 0 \doteq 0 + w)$$

Induktionsanfang

$$0 + 0 \doteq 0 + 0 \quad \text{Gleichheitsaxiom der Logik}$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} (w + 1) + 0 &\doteq w + 1 && \text{Axiom 3 von links nach rechts} \\ &&& \text{mit } x \rightsquigarrow (w + 1) \\ &\doteq (w + 0) + 1 && \text{Axiom 3 von rechts nach links} \\ &&& \text{mit } x \rightsquigarrow w \\ &\doteq (0 + w) + 1 && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &\doteq 0 + (w + 1) && \text{Axiom 4 von rechts nach links} \\ &&& \text{mit } x \rightsquigarrow 0, y \rightsquigarrow w \end{aligned}$$

# Assoziativität der Addition

$$PA \vdash \forall u \forall v \forall w ((u + v) + w \doteq u + (v + w))$$

Induktion nach  $w$  Induktionsanfang:  $(u + v) + 0 \doteq u + (v + 0)$

$$\begin{array}{ll} (u + v) + 0 \doteq u + v & \text{Ax 3} \\ & x \rightsquigarrow (u + v) \\ v + 0 \doteq v & \text{Ax 3} \\ & x \rightsquigarrow v \end{array}$$

Induktionshypothese  $(u + v) + w \doteq u + (v + w)$

Induktionsbehauptung  $(u + v) + (w + 1) \doteq u + (v + (w + 1))$

$$\begin{array}{ll} (u + v) + (w + 1) \doteq ((u + v) + w) + 1 & \text{Ax 4} \\ & x, y \rightsquigarrow (u + v), w \\ \doteq (u + (v + w)) + 1 & \text{IndHyp} \\ \doteq (u + ((v + w) + 1)) & \text{Ax 4} \\ & x, y \rightsquigarrow u, v + w \end{array}$$

# Vollständigkeit von $PA$ ?

Kann man alle wahren Aussagen über die Struktur  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, *, 0, 1 \rangle$  aus den Axiomen  $PA$  herleiten?

Notation:

$$\begin{aligned} Th(\mathcal{N}) &= \{ \phi \in Fml_{\Sigma_{PA}} \mid \mathcal{N} \models \phi \} \\ Cn(PA) &= \{ \phi \in Fml_{\Sigma_{PA}} \mid PA \vdash \phi \} \end{aligned}$$

Fakten:

1.  $Cn(PA) \subseteq Th(\mathcal{N})$
2. Für alle  $\phi \in Fml_{\Sigma_{PA}}$  gilt:  $\phi \in Th(\mathcal{N})$  oder  $\neg\phi \in Th(\mathcal{N})$
3.  $Cn(PA)$  ist rekursiv aufzählbar.

Frage:  $Th(\mathcal{N}) \subseteq Cn(PA)$ ?

## Resultate

1.  $Th(\mathcal{N})$  ist nicht rekursiv.  
Beweis z.B. in  
Einführung in die mathematische Logik  
H-D. Ebbinghaus, J. Flum und W. Thomas  
Spektrum Akademischer Verlag, 2007, (5. Aufl.)
2.  $Th(\mathcal{N})$  ist nicht rekursiv aufzählbar (nicht axiomatisierbar).  
1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz  
folgt aber auch einfach aus (1)
3.  $Cn(PA) \subsetneq Th(\mathcal{N})$
4.  $Th(\langle \mathbb{N}, +, 0, 1 \rangle)$  ist rekursiv (entscheidbar).  
Presburger Arithmetik

# Nichtaxiomatisierbarkeit von $Th(\mathcal{N})$

$$Cn(PA) \subsetneq Th(\mathcal{N})$$

Gibt es ein Beispiel  $\phi$  mit  $\phi \in Th(\mathcal{N})$  und  $\phi \notin Cn(PA)$ ?