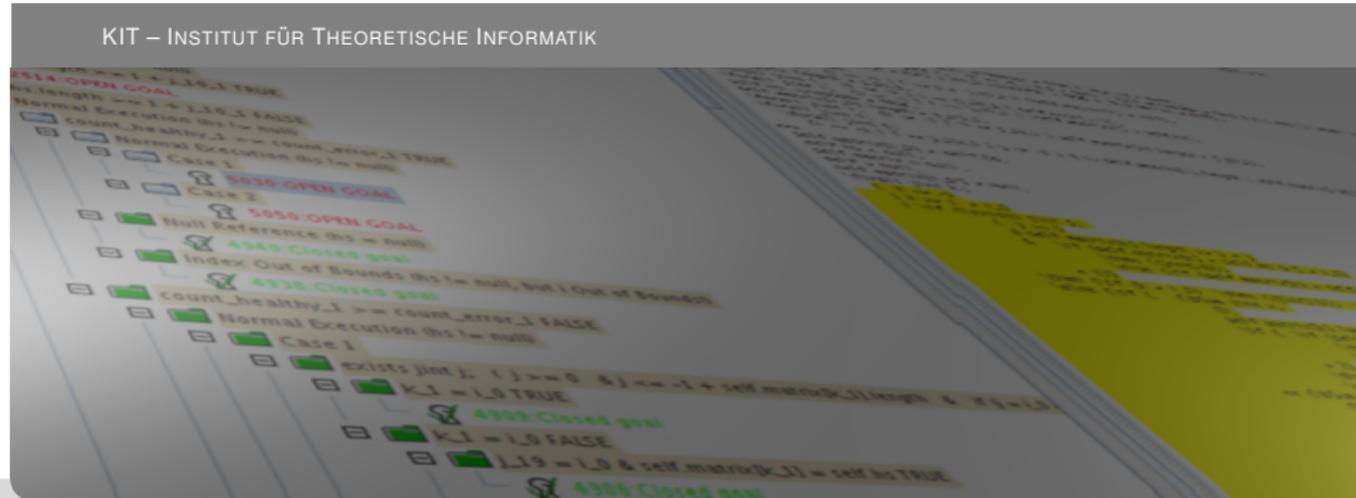


# Formale Systeme

Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Wesentliche Eigenschaften

- ▶ Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T}} \mathbf{0}.$$

- ▶ Beweis durch Fallunterscheidung
- ▶ Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

## Vorteile

- ▶ Intuitiver als Resolution
- ▶ Formeln müssen nicht in Normalform sein
- ▶ Im aussagenlogischen Fall:  
Falls Formelmenge erfüllbar ist (Beweis schlägt fehl),  
wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation)  
konstruiert

## Nachteil

- ▶ Mehr als eine Regel

## Definition (Vorzeichenformel Syntax)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \quad \text{mit } A \in \text{For}0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

## Definition (Vorzeichenformeln Semantik)

Wir setzen  $val_I$  fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

## Uniforme Notation

**konjunktive Formeln**

**Typ  $\alpha$**

---

$$1(A \wedge B)$$

$$0(A \vee B)$$

$$0(A \rightarrow B)$$

$$0\neg A$$

$$1\neg A$$

---

**disjunktive Formeln**

**Typ  $\beta$**

---

$$0(A \wedge B)$$

$$1(A \vee B)$$

$$1(A \rightarrow B)$$

**Universelle Formeln**

**Typ  $\gamma$**

---

$$1\forall xA(x)$$

$$0\exists xA(x)$$

**existentielle Formeln**

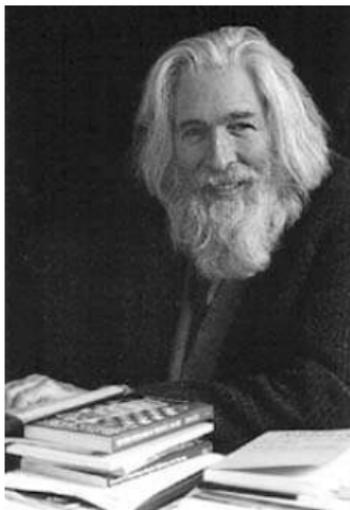
**Typ  $\delta$**

---

$$1\exists xA(x)$$

$$0\forall xA(x)$$

Die universelle Notation wurde eingeführt von



Raymond Smullyan

## Zuordnung Formeln / Unterformeln

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

$\gamma$	$\gamma_1$
$1\forall xA$	$1A$
$0\exists xA$	$0A$

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

$\delta$	$\delta_1$
$1\exists xA$	$1A$
$0\forall xA$	$0A$

## Tableauregeln

$$\alpha\text{-Regel} \quad \frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2}$$

$$\beta\text{-Regel} \quad \frac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$$

$$\gamma\text{-Regel} \quad \frac{\gamma}{\gamma_1(Y)}$$

für eine neue Variable  $Y$

$$\delta\text{-Regel} \quad \frac{\delta}{\delta_1(f(X_1, \dots, X_n))}$$

$f$  ein neues Funktionssymbol

$X_1, \dots, X_n$

alle freien Variablen in  $\delta$

## Definition: Tableau

Ein Tableau ist ein binärer Baum, dessen Knoten mit Vorzeichenformeln markiert sind.

## Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

# Tableaukonstruktion

Sei  $M$  eine Formelmengende, sei  $A$  eine Formel

## Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten  $0A$  besteht, ist ein Tableau für  $A$  über  $M$ .

## Erweiterung

- ▶  $T$  ein Tableau für  $A$  über  $M$
- ▶  $B$  ein Ast von  $T$
- ▶  $F$  eine Formel auf  $B$ , die kein Atom ist

$T'$  entstehe durch Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel

Dann ist  $T'$  ein Tableau für  $A$  über  $M$

## Voraussetzungsregel

- ▶  $T$  ein Tableau für  $A$  über  $M$
- ▶  $F$  eine Formel in  $M$

$T'$  entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch  $1F$   
Dann ist  $T'$  ein Tableau für  $A$  über  $M$

## Definition: Geschlossener Ast

Ein Ast  $B$  eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \in B$$

## Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau  $T$  ist geschlossen, wenn es eine kollisionsfreie Substitution  $\sigma$  gibt, so daß für jeden Ast  $B$  von  $T$  der substituierte Ast  $\sigma(B)$  geschlossen ist.

## Tableaubeweis

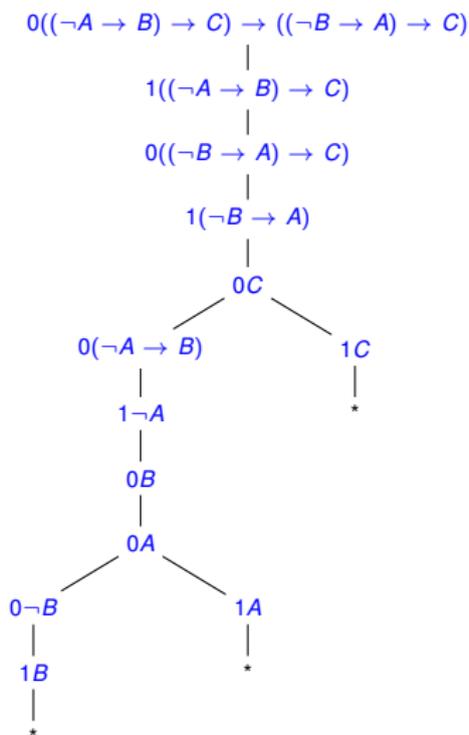
Falls ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  existiert,  
so sagen wir

$A$  ist im Tableaurekalkül aus den Voraussetzungen  $M$  beweisbar  
und schreiben

$$M \vdash_T A$$

# Ausagenlogisches Beispiel

Ist  $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C)$  eine Tautologie?



# Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist  $\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$  eine Tautologie?

0	$\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$	(Start)
1	$\forall x p(x)$	( $\alpha$ -Regel)
0	$\exists y p(y)$	( $\alpha$ -Regel)
1	$p(X)$	( $\gamma$ -Regel)
0	$p(Y)$	( $\gamma$ -Regel)

# Ein prädikatenlogisches Beispiel

Ist  $\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$  eine Tautologie?

$$\begin{array}{l}
 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \quad (\text{Start}) \\
 | \\
 1 \forall x p(x) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\
 | \\
 0 \exists y p(y) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\
 | \\
 1 p(X) \quad (\gamma\text{-Regel}) \\
 | \\
 0 p(Y) \quad (\gamma\text{-Regel})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \sigma = \\
 \implies \\
 \{Y/X\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \\
 | \\
 1 \forall x p(x) \\
 | \\
 0 \exists y p(y) \\
 | \\
 1 p(X) \\
 | \\
 0 p(X)
 \end{array}$$

Anwendung der Abschlußregel.

# Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit  $\sigma(X) = b$  und  $\sigma(Y) = a$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$  und  $p(X, g(X))$  sind nicht unifizierbar  
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

# Mehrfache Anwendung der $\gamma$ -Regel

Beweisaufgabe:  $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

$$\begin{array}{c}
 1p(0) \\
 \vdots \\
 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \\
 \vdots \\
 0p(s(s(0))) \\
 \vdots \\
 1p(X) \rightarrow p(s(X)) \\
 \vdots \\
 0p(X) \quad 0p(s(X)) \quad 1p(s(0)) \\
 \sigma(X) = 0 \quad 1p^*(Y) \rightarrow p(s(Y)) \\
 \vdots \\
 0p(Y) \quad 0p(s(Y)) \quad 1p(s(s(0))) \\
 \sigma(Y) = s(0) \quad * \quad *
 \end{array}$$

# Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

## Theorem

Sei  $M$  eine Formelmengende, sei  $A$  eine Formel

$A$  ist eine logische Folgerung aus  $M$   
genau dann, wenn  
es einen Tableaubeweis für  $A$  über  $M$  gibt

In Symbolen:

$$M \models A \Leftrightarrow M \vdash_{\mathcal{T}} A$$

## Definition: erfüllbares Tableau

Es seien  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ .

Ein Tableau  $T$  für  $A$  über  $M$  heißt *erfüllbar* wenn es eine Interpretation  $\mathcal{D}$  über  $\bar{\Sigma}$  gibt, mit

- ▶  $\mathcal{D}$  ist Modell von  $M$
- ▶ zu jeder Variablenbelegung  $\beta$  gibt es einen Pfad  $\pi$  in  $T$  mit  $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$  für alle  $F$  auf  $\pi$ .

Dabei ist  $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$ .

## Theorem

*Sei  $A \in \text{For}_\Sigma$ ,  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ , alle ohne freie Variablen  
Wenn es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$  gibt,  
dann ist  $M \models A$ .*

*Beweisplan:*

$T_0$	Anfangstableau	nicht erfüllbar	$\Rightarrow$	$M \models A$
$\vdots$				
$T_k$	Zwischentableau	nicht erfüllbar		K-Lemma
$T_{k+1}$	Zwischentableau	nicht erfüllbar		
$\vdots$				
$T_n$	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar		

Sei  $A \in For_{\Sigma}$ ,  $M \subseteq For_{\Sigma}$ , alle ohne freie Variablen

## Lemma: Anfangstableau

Ist das Anfangstableau für  $A$  über  $M$  nicht erfüllbar,  
so gilt  $M \models A$ .

## Lemma: Endtableau

Jedes geschlossene Tableau für  $A$  über  $M$  ist unerfüllbar.

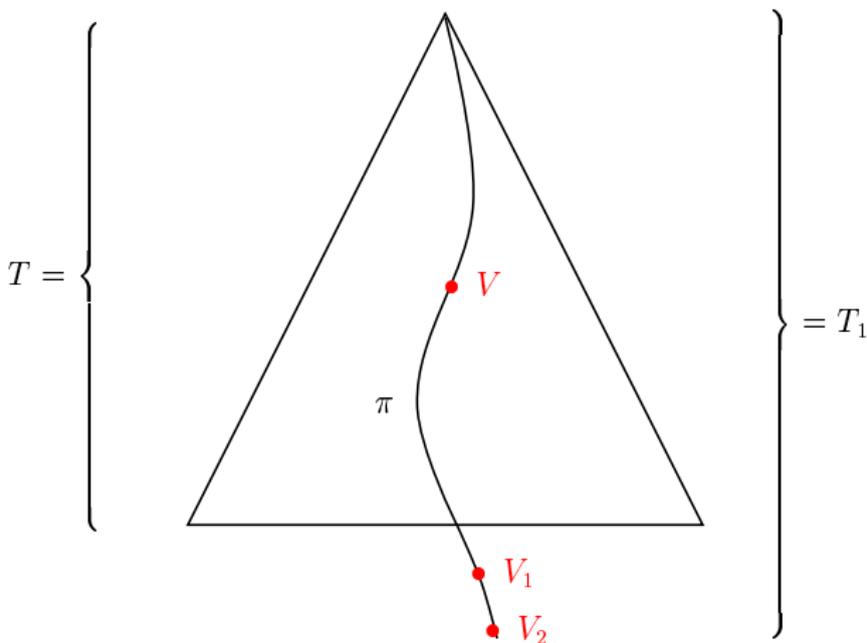
## Korrektheitslemma

$M$  sei eine Formelmenge ohne freie Variablen.

Das Tableau  $T_1$  über  $M$  gehe aus  $T$  über  $M$  durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

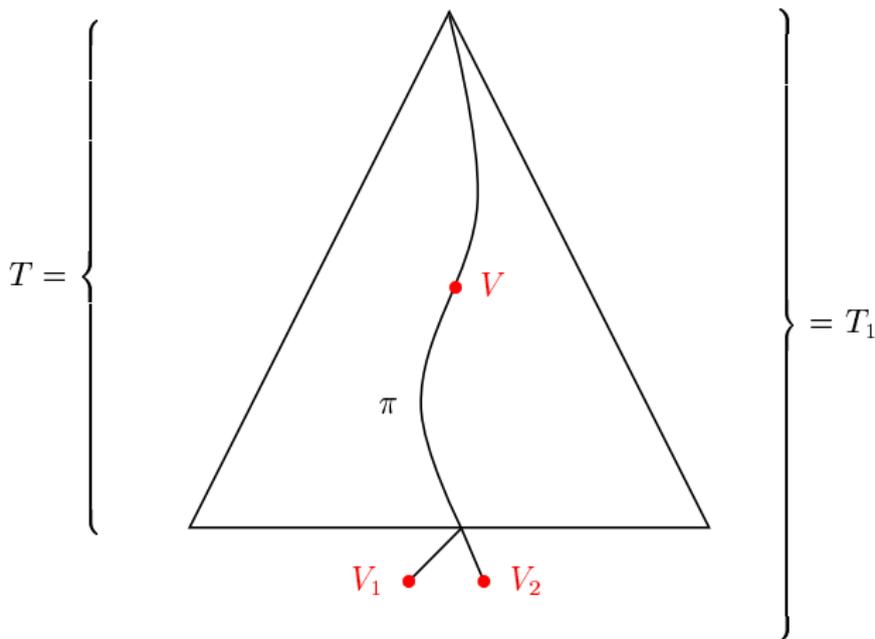
Ist  $T$  erfüllbar, dann ist auch  $T_1$  erfüllbar.

# Beweis des Korrektheitslemma, $\alpha$ -Fall



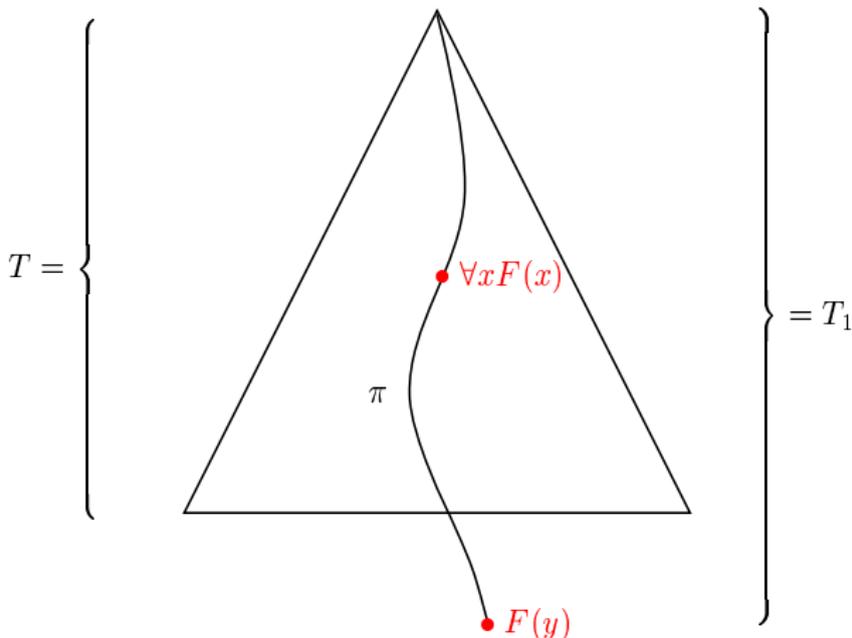
# Beweis des Korrektheitslemma,

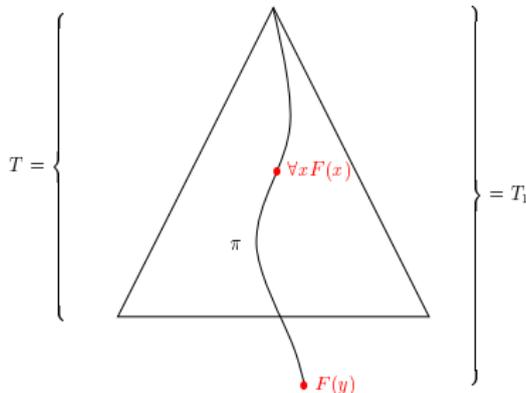
## $\beta$ -Fall



# Beweis des Korrektheitslemma,

## $\gamma$ -Fall





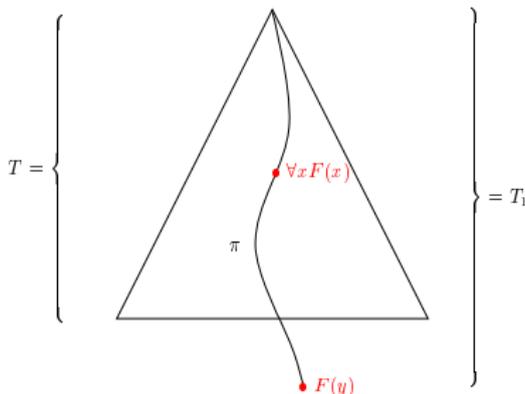
$\mathcal{D}$  sei ein Modell von  $T$  über  $M$ . Wir zeigen, daß  $\mathcal{D}$  auch Modell von  $T_1$  ist.

Sei  $\beta$  eine Belegung und  $\pi_0$  ein Pfad in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Wenn  $\pi_0 \neq \pi$ , ist  $\pi_0$  unverändert ein Pfad in  $T_1$ , fertig.

# Beweis des Korrektheitslemma,

## $\gamma$ -Fall

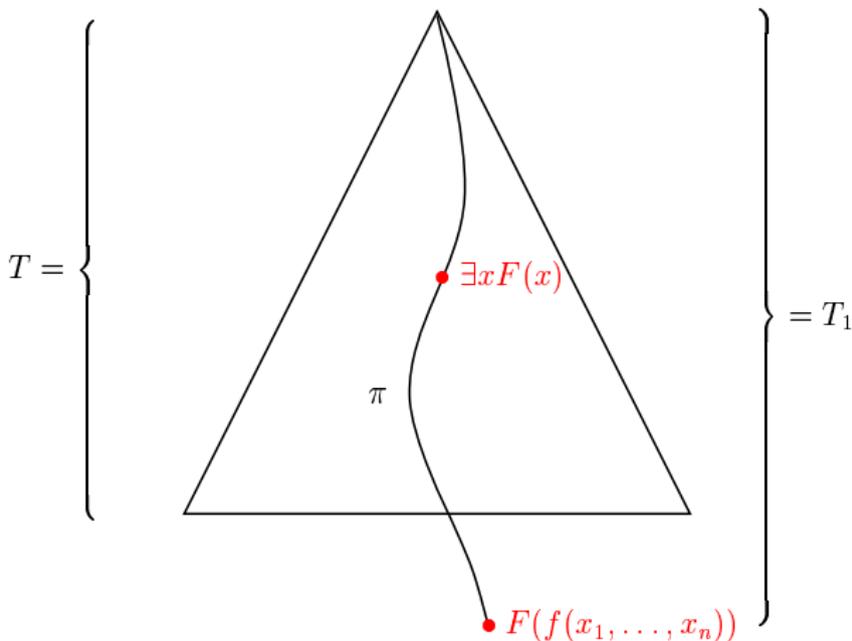


$\mathcal{D}$  sei ein Modell von  $T$  über  $M$ . Wir zeigen, daß  $\mathcal{D}$  auch Modell von  $T_1$  ist.

Sei  $\beta$  eine Belegung und  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$ , i.e.  $\pi_0 = \pi$ .

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$  folgt insbesondere  $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$ , also  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall



Nach Voraussetzung sei  $\mathcal{D}$  Modell von  $T$  über  $M$ .

Wir konstruieren eine Interpretation  $\mathcal{D}'$ , die sich von  $\mathcal{D}$  nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen  $f$  eine Interpretation  $f^{\mathcal{D}'}$  zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = ?$$

Für  $d_1, \dots, d_n \in D$  und  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein  $d \in D$  mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$  gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert  $d \in D$ .

# Beweis des Korrektheitslemma, $\delta$ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß  $\mathcal{D}'$  Modell von  $T_1$  ist.

Es sei  $\beta$  eine beliebige Belegung bzgl.  $\mathcal{D}'$ ,  $\beta$  ist auch Belegung bzgl.  $\mathcal{D}$ , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt  $\pi_0$  in  $T$  mit  $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$ .

Nur der Fall  $\pi_0 = \pi$  ist interessant.

Aus  $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$  folgt nach Konstruktion von  $\mathcal{D}'$  auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades  $\pi$  und in  $M$  das Zeichen  $f$  nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

### Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$*

*dann gibt es ein geschlossenes Tableau für  $A$  über  $M$ .*

Es sei  $t_1, \dots, t_n, \dots$  eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus  $\mathcal{T}_i$  wird eine Folge von Grundsubstitutionen  $\sigma_i$  erzeugt.

Entsteht  $\mathcal{T}_{i+1}$  aus  $\mathcal{T}_i$  durch Anwendung einer  $\gamma$ -Regel mit der Formel  $F$  auf dem Pfad  $\pi$  dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei  $X$  die neu eingeführte Variable ist und es sich um die  $n$ -te Anwendung der  $\gamma$ -Regel für  $F$  auf  $\pi$  handelt.

Sonst  $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ .

Ein Pfad  $\pi$  im Tableau  $\mathcal{T}_i$  wird nicht erweitert, wenn  $\sigma_i(\pi)$  abgeschlossen ist.

### Theorem

*Sei  $A$  eine Formel und  $M$  eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.*

*Gilt  $M \models A$   
dann terminiert jedes*

- ▶ faire Verfahren,*
- ▶ das mit  $\perp A$  und  $\sigma_0 = id$  beginnt,*
- ▶ und die Konstruktionsvorschrift einhält*

*nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.*

*Fairness* bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede  $\gamma$ -Formel unbeschränkt oft benutzt und jede Formel aus  $M$  kommt dran.

# Beweisansatz

Details später

Angenommen die fair konstruierte Folge  $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$  terminiert nicht.

Setze  $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$  und  $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$ .

$\sigma(\mathcal{T})$  ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad  $\pi$  in  $\sigma(\mathcal{T})$ .

Noch Konstruktion muß  $\pi$  ein offener Pfad sein.

Aus  $\pi$  kann man ein Modell  $\mathcal{D}$  ablesen mit  $\mathcal{D} \models M$  und  $\mathcal{D} \models \neg A$ .

**Widerspruch zu  $M \models A$ .**

### Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

### Modellexistenz

- ▶ Jede Hintikka- Menge besitzt ein Modell
- ▶ Jeder offene Ast in einem fairen, abgeschlossenen Tableau ist eine Hintikka- Menge.

### Definition

Eine Menge  $H$  geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur  $\Sigma$  heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine  $\alpha$ -Formel  $F$ ,  $F \in H$ ,  
dann auch  $F_1 \in H$  und  $F_2 \in H$ .
- (H 2) Gilt  $F \in H$  für eine  $\beta$ -Formel  $F$ ,  
dann auch  $F_1 \in H$  oder  $F_2 \in H$ .
- (H 3) Gilt  $F \in H$  für eine  $\delta$ -Formel  $F$ ,  
dann gibt es einen Grundterm  $t$  mit  $F_1(t) \in H$ .
- (H 4) Gilt  $F \in H$  für eine  $\gamma$ -Formel  $F$ ,  
dann gilt  $F_1(t) \in H$  für jeden Grundterm  $t$ .
- (H 5) Für keine  $A$  kommen  $1A$  und  $0A$  in  $H$  vor.

## Theorem

*Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:*

- 1. Was ist die maximale Anzahl von  $\gamma$ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel  $F \in For_{\Sigma}$ ?*
- 2. Ist eine prädikatenlogische Formel  $F \in For_{\Sigma}$  allgemeingültig?  
Triviale Signaturen  $\Sigma$  ausgenommen.*

# Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

## Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

$$\begin{array}{c|c|c} & \phi & \\ \hline \psi_{1,1} & \dots & \psi_{n,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{1,K_1} & \dots & \psi_{n,k_n} \end{array}$$

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaurekalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln  $\psi_{i,j}$  Teilformeln der Vorzeichenformel  $\phi$  sind.

# Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel

Eine allgemeine Tableauregel

$$\begin{array}{c|ccc} & & \phi & \\ \hline \psi_{1,1} & \dots & \psi_{n,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{1,k_1} & \dots & \psi_{n,k_n} \end{array}$$

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation  $I$  gilt  
 $val_I(\phi) = W$  gdw es gibt ein  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , so dass  
für alle  $j$ ,  $1 \leq j \leq k_i$  gilt  $val_I(\psi_{i,j}) = W$

# Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	$W$	$F$
$W$	$W$	$F$
$F$	$F$	$W$

$\frac{1(A \leftrightarrow B)}{1A \mid 0A}$	$\frac{0(A \leftrightarrow B)}{1A \mid 0A}$
$1B \mid 0B$	$0B \mid 1B$