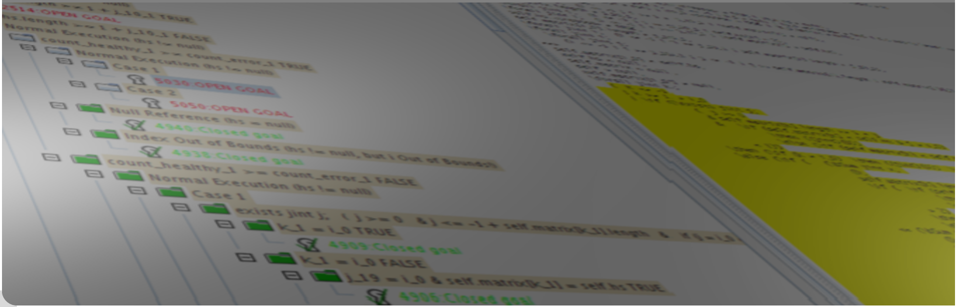
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Beweistheorie: Motivierendes Beispiel

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Wurzeln der Logik

- Eine der Wurzeln der modernen Logik ist das Interesse an einer systematischen Analyse des menschlichen Denkens.
- Wir fokusieren in dieser Vorlesung auf den Teil des menschlichen Denkens, den man mit *logischem Schließen* enger eingrenzen kann.
- Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Alltagslogik.

Beispiel aus der Alltagslogik

Frage

Kann mein Bruder mein Schwager sein?

Antwort

1. Nehmen wir mal für den Augenblick an, mein Bruder wäre mein Schwager.
2. Nach allgemeinem Sprachgebrauch ist ein Schwager der Bruder meiner Frau.
3. Wenn aber mein Bruder auch der Bruder meiner Frau ist, dann ist meine Frau meine Schwester.
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
5. Also kann mein Bruder nicht mein Schwager sein.

Formalisierung

1. *Bruno* ist mein Bruder. $bruder(Bruno, i)$
2. *Bruno* ist mein Schwager. $schwager(Bruno, i)$
3. Wenn jemand mein Schwager ist, dann ist er ein Bruder meiner Frau.
   $\forall x(schwager(x, i) \to bruder(x, fr(i)))$
4. Nach deutschem Eherecht darf niemand mit seiner Schwester verheiratet sein.
   $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. *Bruno* ist ein Bruder meiner Frau.
   $bruder(Bruno, fr(i))$
6. Meine Frau ist meine Schwester
   $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

Erster Schritt zur Analyse

1. $bruder(Bruno, i)$
2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
4. $\forall x(\neg schwester(fr(x), x))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$
7. Widerspruch

1. ist ein Faktum, das im vorliegenden Kontext gilt. 2. ist eine Annahme für die augenblickliche Argumentation. 3. und 4. sind Fakten, die auch außerhalb des vorliegenden Kontexts gelten.
5. ist eine Folgerung aus 2 und 3.
Genauer Analyse folgt gleich. 6. ist wieder eine Folgerung aus den vorangegangenen Aussagen.
Das schauen wir uns danach genauer an. Zu 7. Aus 4. können

Analyse eines Beweisschritts

Wie kommt man von 2. und 3. zu 5.?

2. $schwager(Bruno, i)$
3. $\forall x(schwager(x, i) \rightarrow bruder(x, fr(i)))$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$

vom Allgemeinen zum Besonderen	Modus Ponens
$\dfrac{\forall x(schw(x, i) \rightarrow br(x, fr(i)))}{schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i))}$	$\dfrac{\begin{array}{c} schw(Bruno, i) \rightarrow br(Bruno, fr(i)) \\ schw(Bruno, i) \end{array}}{br(Bruno, fr(i))}$
$\dfrac{\forall x(\phi(x))}{\phi(t)}$ für beliebigen Term t.	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6 aus 1 und 5 herleiten?

1. $bruder(Bruno, i)$
5. $bruder(Bruno, fr(i))$
6. $schwester(fr(i), i)$

Wir haben, offensichtlich, vergessen, ein Faktum in die Formalisierung mit aufzunehmen:

5a. Wenn jemand gleichzeitig mein Bruder und der Bruder einer Frau ist, dann ist diese Frau meine Schwester
$\forall x \forall y (bruder(x, i) \land bruder(x, y) \land w(y) \rightarrow schwester(y, i))$

Dabei ist $w()$ ein einstellige Prädikat für *weiblich*.

Analyse eines weiteren Beweisschritts

Wie kann man 6. aus 1., 5. und 5a. herleiten?

1.	$bruder(Bruno, i)$
5.	$bruder(Bruno, fr(i))$
5a.	$\forall x \forall y (bruder(x, i) \wedge bruder(x, y) \wedge w(y) \rightarrow schwester(y, i))$
5b.	$w(fr(i))$
6.	$schwester(fr(i), i)$

Der Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen liefert aus 5a.

6a. $bruder(Bruno, i) \wedge bruder(Bruno, fr(i)) \wedge w(fr(i))$
$\rightarrow schwester(fr(i), i)$

Daraus folgt 6. mit modus ponens.

Ein weiteres Beispiel

Vokabular:

$kd(k, m, v)$	soll heißen	k ist Kind von m (Mutter), v (Vater)
$w(a)$	soll heißen	a ist weiblich

Axiomatisierung der Relation *Schwester_von*

$$s(a_1, a_2) \quad \leftrightarrow \quad \exists y \exists z (w(a_1) \wedge kd(a_1, y, z) \wedge kd(a_2, y, z))$$

Kann man daraus

$$s(a_1, a_2) \wedge s(a_1, a_3) \wedge w(a_2) \rightarrow s(a_2, a_3)$$

ableiten und gegebenfalls wie?

Versuch einer Herleitung

1 $s(a_1, a_2) \wedge s(a_1, a_3) \wedge w(a_2) \to s(a_2, a_3)$
Einsetzen der Definition
2 $\exists y \exists z(w(a_1) \wedge kd(a_1, y, z) \wedge kd(a_2, y, z)) \wedge$
$\exists y \exists z(w(a_1) \wedge kd(a_1, y, z) \wedge kd(a_3, y, z)) \wedge$
$w(a_2) \quad \to \quad s(a_2, a_3)$
Skolemisierung. Namen für $\exists$-Quantoren
3 $w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge kd(a_2, m_1, v_1) \wedge$
$w(a_1) \wedge kd(a_1, m_2, v_2) \wedge kd(a_3, m_2, v_2) \wedge$
$w(a_2) \quad \to \quad s(a_2, a_3)$

?

Ergänzung der Axiomatisierung

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \forall z_1 \forall z_1 (kd(x, y_1, z_1) \land kd(x, y_2, z_2) \\ \rightarrow (y_1 \doteq y_2 \land z_1 \doteq z_2))$$

Instantiierung liefert:

$$kd(x, m_1, v_1) \land kd(x, m_2, v_2) \rightarrow (m_1 \doteq m_2 \land v_1 \doteq v_2)$$

Zurück zur Herleitung.

Versuch einer Herleitung (Forts.)

$$
\begin{array}{lllr}
1 & s(a_1, a_2) \wedge s(a_1, a_3) \wedge w(a_2) \rightarrow s(a_2, a_3) & & \\
2 & \exists y \exists z (w(a_1) \wedge kd(a_1, y, z) \wedge kd(a_2, y, z)) \wedge & & \\
  & \exists y \exists z (w(a_1) \wedge kd(a_1, y, z) \wedge kd(a_3, y, z)) \wedge & & \\
  & w(a_2) & \rightarrow & s(a_2, a_3) \\
3 & w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge kd(a_2, m_1, v_1) \wedge & & \\
  & w(a_1) \wedge kd(a_1, m_2, v_2) \wedge kd(a_3, m_2, v_2) \wedge & & \\
  & w(a_2) & \rightarrow & s(a_2, a_3) \\
  & \text{Gleichheitsersetzung: } m_2 \rightsquigarrow m_1, v_2 \rightsquigarrow v_1 & & \\
4 & w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge kd(a_2, m_1, v_1) \wedge & & \\
  & w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge kd(a_3, m_1, v_1) \wedge & & \\
  & w(a_2) & \rightarrow & s(a_2, a_3) \\
  & \text{Verdoppelung eliminieren} & & \\
4 & w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge & & \\
  & kd(a_2, m_1, v_1) \wedge \wedge kd(a_3, m_1, v_1) \wedge w(a_2) \rightarrow \quad s(a_2, a_3) & &
\end{array}
$$

Versuch einer Herleitung (Forts.)

4	$w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge$	
	$kd(a_2, m_1, v_1) \wedge \wedge kd(a_3, m_1, v_1) \wedge w(a_2) \rightarrow$	$s(a_2, a_3)$
	Ersetzung von Termen durch $\exists$-Quantoren	
5	$w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge$	
	$\exists y \exists z (kd(a_2, y, z) \wedge \wedge kd(a_3, y, z) \wedge w(a_2)) \rightarrow$	$s(a_2, a_3)$
	Einsetzen der Definition. Jetzt umgekehrte Richtung	
6	$w(a_1) \wedge kd(a_1, m_1, v_1) \wedge s(a_2, a_3) \rightarrow$	$s(a_2, a_3)$
	Das ist eine Tautologie!	

Ausblick

Regelsysteme für das logische Schließen nennt man in der formalen Logik *Kalküle*.
Ein Kalkül heißt *korrekt*, wenn jede ableitbare Formel allgemeingültig ist.
Ein Kalkül heißt vollständig, wenn jede allgemeingültige Aussage in ihm hergeleitet werden kann.
Es gibt eine erstaunliche Fülle verschiedener korrekter und vollständiger Kalküle.
Wir behandeln:

- Hilbert-Kalkül
- Resolutionskalkül
- Tableaukalkül
- Sequenzenkalkül