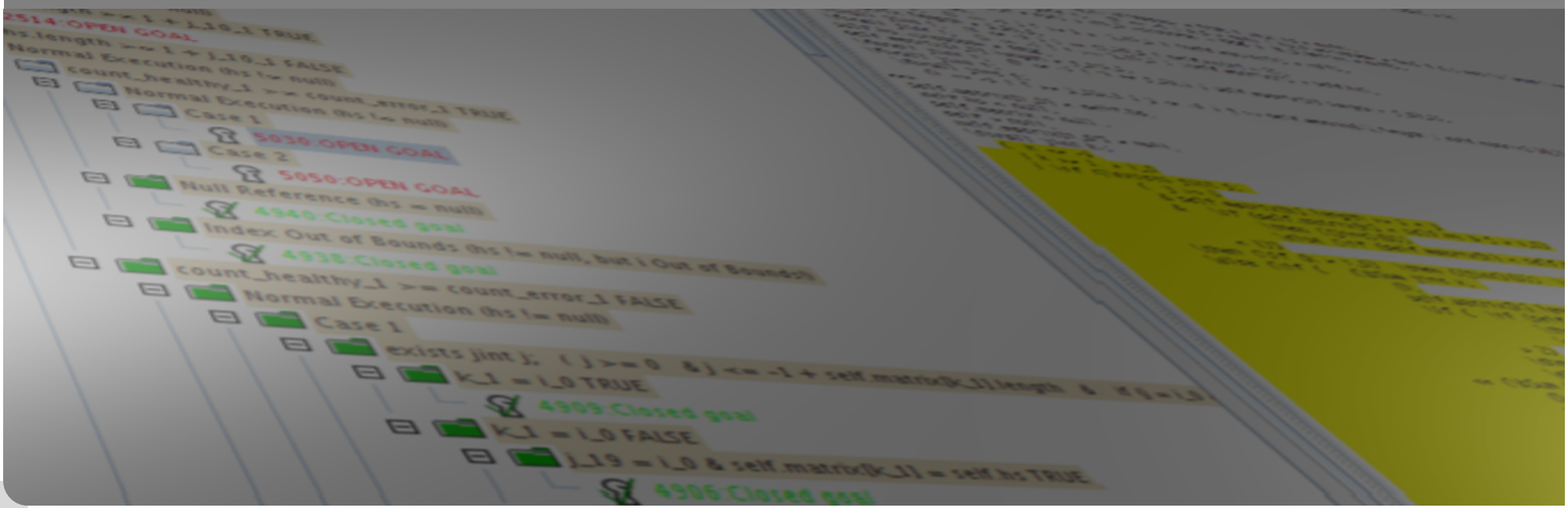
Formale Systeme

Das Erfüllbarkeitsproblem

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?

Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{W}$?

Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{W}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Das SAT Problem

oder Erfüllbarkeitsproblem

SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For0$

Frage: Ist F erfüllbar?
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{W}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

Satz von Cook

Stephen A. Cook ⋆1939

- Informatik-Professor an der Universität Toronto

Satz von Cook

Stephen A. Cook ⋆1939

- Informatik-Professor an der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“

Satz von Cook

Stephen A. Cook ⋆1939

- Informatik-Professor an der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- Turing-Preisträger

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

Bemerkungen:

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.

Teilklassen

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

Bemerkungen:

- k-KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

- Das **Davis–Putnam–Logemann–Loveland** (DPLL) Verfahren ist das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren in implementierten Erfüllbarkeitstests.

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

- Das **Davis–Putnam–Logemann–Loveland** (DPLL) Verfahren ist das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren in implementierten Erfüllbarkeitstests.
- Im Englischen nennt man solche Programme *SAT solver*.

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

- Das **Davis–Putnam–Logemann–Loveland** (DPLL) Verfahren ist das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren in implementierten Erfüllbarkeitstests.
- Im Englischen nennt man solche Programme *SAT solver*.
- Das DPLL Verfahren benötigt als Eingabe eine KNF, also eine Konjunktion von Klauseln.

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

- Das **Davis–Putnam–Logemann–Loveland** (DPLL) Verfahren ist das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren in implementierten Erfüllbarkeitstests.
- Im Englischen nennt man solche Programme *SAT solver*.
- Das DPLL Verfahren benötigt als Eingabe eine KNF, also eine Konjunktion von Klauseln.
- Da es in einer Klausel nicht auf die Reihenfolge der Literale ankommt und auch das Weglassen mehrfach auftretender Literale die logische Äquivalenz erhält, werden Klauseln als Mengen von Literalen repräsentiert.

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

- Das **Davis–Putnam–Logemann–Loveland** (DPLL) Verfahren ist das zur Zeit schnellste und fast ausschließlich benutzte Verfahren in implementierten Erfüllbarkeitstests.
- Im Englischen nennt man solche Programme *SAT solver*.
- Das DPLL Verfahren benötigt als Eingabe eine KNF, also eine Konjunktion von Klauseln.
- Da es in einer Klausel nicht auf die Reihenfolge der Literale ankommt und auch das Weglassen mehrfach auftretender Literale die logische Äquivalenz erhält, werden Klauseln als Mengen von Literalen repräsentiert.
- Dasselbe gilt für Konjunktionen von Klauseln.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
2. $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
2. $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
3. $I(\emptyset) = \mathbf{W}$.

Notation

1. Eine Klausel K ist eine Menge von Literalen.
2. Eine KNF ist eine Menge von Klauseln.
3. $\square$ steht für die leere Klausel.
4. $\emptyset$ für die leere Menge von Klauseln.

Semantik

I Interpretation, S Menge von Klauseln, C Klausel.

1. $val_I(S) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls für alle } C \in S \text{ gilt: } val_I(C) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
2. $val_I(C) = \begin{cases} \mathbf{W} & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit } val_I(L) = \mathbf{W} \\ \mathbf{F} & \text{sonst} \end{cases}$
3. $I(\emptyset) = \mathbf{W}$.
4. $I(\square) = \mathbf{F}$.

DPLL Pseudocode

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

DPLL Pseudocode

```
1  if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2  if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3  if S enthält Einerklausel
4     then choose Einerklausel K ∈ S;
5        DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6     else choose P ∈ atom(S)
7        DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
  wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$

DPLL Pseudocode

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
  wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$
- $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid L \notin C\}$
  $\text{red}_{\{L\}}(C) = \{L' \mid L' \in C \text{ und } L' \neq \bar{L}\} = C \setminus \{\bar{L}\}$

DPLL Pseudocode

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
  wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$
- $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid L \notin C\}$
  $\text{red}_{\{L\}}(C) = \{L' \mid L' \in C \text{ und } L' \neq \bar{L}\} = C \setminus \{\bar{L}\}$
- $S_P = S \cup \{\{P\}\}$ und $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$.

DPLL Pseudocode

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

- $\text{atom}(S) = \bigcup_{C \in S} \text{atom}(C)$,
  wobei $\text{atom}(C) = \{P \in \Sigma \mid P \in C \text{ oder } \neg P \in C\}$
- $\text{red}_{\{L\}}(S) = \{\text{red}_{\{L\}}(C) \mid L \notin C\}$
  $\text{red}_{\{L\}}(C) = \{L' \mid L' \in C \text{ und } L' \neq \bar{L}\} = C \setminus \{\bar{L}\}$
- $S_P = S \cup \{\{P\}\}$ und $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$.

Der DPLL Algorithmus ist, wie man sieht, rekursiv.

DPLL Beispiel

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3 \qquad \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4$$
$$\neg P_1 \vee P_3 \qquad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$
$$P_1 \vee \neg P_3 \qquad \neg P_2$$

DPLL Beispiel

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$
\begin{array}{ll}
P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\
\neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\
P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2
\end{array}
$$

Beim ersten Aufruf von DPLL(S) wird das Unterprogramm $red_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen.

DPLL Beispiel

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4$$
$$\neg P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$
$$P_1 \vee \neg P_3 \quad \neg P_2$$

Beim ersten Aufruf von DPLL(S) wird das Unterprogramm $red_{\{\neg P_2\}}(S)$ aufgerufen und liefert S_1:

$$P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_4$$
$$\neg P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

rot	=	ganze Klausel entfernt
dunkelgrün	=	Literal aus Klausel entfernt
blau	=	unverändert

DPLL Beispiel

$$P_1 \vee P_3 \qquad \neg P_1 \vee \neg P_4$$
$$\neg P_1 \vee P_3 \qquad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

S_1 enthält keine Einerklausel.

DPLL Beispiel

$P_1 \vee P_3$ $\quad \neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$ $\quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$

S_1 enthält keine Einerklausel. Die Variable P_1 wird gewählt und DPLL($S_{1,0}$) und DPLL($S_{1,1}$) werden aufgerufen.

$S_{1,0}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
P_1

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
$\neg P_1$

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

P_1

$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
P_1

$red_{\{P_1\}}(S_{1,0})$: Die Klauseln werden gestrichen.
Das Literal wird entfernt.

$$red_{\{P_1\}}(S_{1,0}) = S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

DPLL Beispiel

$$S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von $red_{\{P_3\}}(S_{2,0})$ liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

DPLL Beispiel

$$S_{2,0} = \{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von $red_{\{P_3\}}(S_{2,0})$ liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$red_{\{P_4\}}(\{P_4, \neg P_4\}) = \{\square\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,0}$ folgt.

DPLL Beispiel

$S_{1,0}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
P_1

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
$\neg P_1$

Jetzt kommt die Abarbeitung von DPLL($S_{1,1}$) an die Reihe.

DPLL Beispiel

$S_{1,1}$:

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$\neg P_1$

$red_{\{\neg P_1\}}(S_{1,1})$ entfernt die Klauseln, in denen $\neg P_1$ vorkommt . . .

DPLL Beispiel

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$P_1 \vee \neg P_3$

. . . und streicht in den restlichen P_1.

DPLL Beispiel

$$S_{1,1}:$$
$$P_1 \vee P_3$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

. . . und streicht in den restlichen P_1.
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

DPLL Beispiel

$$S_{1,1}:$$
$$P_1 \vee P_3$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1.
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,

DPLL Beispiel

$$S_{1,1}:$$
$$P_1 \vee P_3$$
$$P_1 \vee \neg P_3$$

. . . und streicht in den restlichen P_1.
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,
woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,1}$ und damit insgesamt die Unerfüllbarkeit von S folgt.

DPLL

Theorem

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
   2.1 aus DPLL(S) $= 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und

DPLL

Theorem

1. Der DPLL Algorithmus terminiert für jede Eingabe.
2. Der DPLL Algorithmus ist korrekt und vollständig.
   - 2.1 aus $\mathrm{DPLL}(S) = 1$ folgt, daß S erfüllbar ist und
   - 2.2 ist S erfüllbar dann gilt $\mathrm{DPLL}(S) = 1$.

DPLL Pseudocode - Terminierung

```
1   if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2   if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3   if S enthält Einerklausel
4      then choose Einerklausel K ∈ S;
5         DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6      else choose P ∈ atom(S)
7         DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

Beweismethode

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{\text{DPLL}(S_P), \text{DPLL}(S_{\neg P})\}$;

Beweismethode
Finde ein Maß $m(S) \in \mathbb{N}$ für Klauselmengen S mit

1. stets $0 \leq m(S)$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

Beweismethode
Finde ein Maß $m(S) \in \mathbb{N}$ für Klauselmengen S mit

1. stets $0 \leq m(S)$
2. $m(red_K(S)) < m(S)$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

Beweismethode
Finde ein Maß $m(S) \in \mathbb{N}$ für Klauselmengen S mit

1. stets $0 \leq m(S)$
2. $m(red_K(S)) < m(S)$
3. $m(S_P) < m(S)$, $m(S_{\neg P}) < m(S)$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

$a_u(S) = \{P \mid \{P\} \in S \text{ oder } \{\neg P\} \in S\}$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

$a_u(S) = \{P \mid \{P\} \in S \text{ oder } \{\neg P\} \in S\}$
$a_{nu}(S) = atom(S) \setminus a_u(S)$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

$a_u(S) = \{P \mid \{P\} \in S \text{ oder } \{\neg P\} \in S\}$
$a_{nu}(S) = atom(S) \setminus a_u(S)$
$m(S) = card(a_u(S)) + 2 * card(a_{nu}(S))$

DPLL Pseudocode - Terminierung

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL$(S) = 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL$(S) = 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL$(S) =$ DPLL$(\text{red}_K(S))$;
6 **else choose** $P \in \text{atom}(S)$
7 DPLL$(S) =$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL$(S_{\neg P})\}$;

$a_u(S) = \{P \mid \{P\} \in S \text{ oder } \{\neg P\} \in S\}$
$a_{nu}(S) = atom(S) \setminus a_u(S)$
$m(S) = card(a_u(S)) + 2 * card(a_{nu}(S))$

1. $a_u(red_K(S)) \subset a_u(S)$, $a_{nu}(red_K(S)) \subseteq a_{nu}(S)$
   $\Rightarrow \quad m(red_K(S)) < m(S)$
2. $a_u(S_P) = a_u(S) \cup \{P\}$, $a_{nu}(S_P) = a_u(S) \setminus \{P\}$
   $\Rightarrow \quad m(S_P) < m(S)$

DPLL Pseudocode - Korrektheit

falls DPLL(S) $= 1$ dann ist S erfüllbar
falls S erfüllbar dann DPLL(S) $= 1$.

1 **if** $S = \emptyset$ **then** DPLL(S) $= 1$; **stop**
2 **if** $\square \in S$ **then** DPLL(S) $= 0$; **stop**
3 **if** S enthält Einerklausel
4 **then choose** Einerklausel $K \in S$;
5 DPLL(S) $=$ DPLL(red$_K(S)$);
6 **else choose** $P \in$ atom(S)
7 DPLL(S) $=$ **max**$\{$DPLL(S_P), DPLL($S_{\neg P}$)$\}$;

DPLL Pseudocode - Korrektheit

falls DPLL(S) $= 1$ dann ist S erfüllbar
falls S erfüllbar dann DPLL(S) $= 1$.

```
1  if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2  if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3  if S enthält Einerklausel
4     then choose Einerklausel K ∈ S;
5        DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6     else choose P ∈ atom(S)
7        DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

- Induktion nach $n = m(S)$.

DPLL Pseudocode - Korrektheit

falls DPLL(S) $= 1$ dann ist S erfüllbar
falls S erfüllbar dann DPLL(S) $= 1$.

```
1   if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2   if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3   if S enthält Einerklausel
4      then choose Einerklausel K ∈ S;
5         DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6      else choose P ∈ atom(S)
7         DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

- Induktion nach $n = m(S)$.
- Für $n = 0$ gilt $S = \emptyset$ oder $S = \{\square\}$

DPLL Pseudocode - Korrektheit

falls DPLL(S) $= 1$ dann ist S erfüllbar
falls S erfüllbar dann DPLL(S) $= 1$.

```
1   if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2   if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3   if S enthält Einerklausel
4      then choose Einerklausel K ∈ S;
5         DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6      else choose P ∈ atom(S)
7         DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

- Induktion nach $n = m(S)$.
- Für $n = 0$ gilt $S = \emptyset$ oder $S = \{\square\}$
- Ist $\{L\} \in S$ dann gilt:
  S ist erfüllbar gdw $\text{red}_{\{L\}}(S)$ ist erfüllbar

DPLL Pseudocode - Korrektheit

falls DPLL(S) $= 1$ dann ist S erfüllbar
falls S erfüllbar dann DPLL(S) $= 1$.

```
1  if S = ∅ then DPLL(S) = 1; stop
2  if □ ∈ S then DPLL(S) = 0; stop
3  if S enthält Einerklausel
4     then choose Einerklausel K ∈ S;
5        DPLL(S) = DPLL(red_K(S));
6     else choose P ∈ atom(S)
7        DPLL(S) = max{DPLL(S_P), DPLL(S_¬P)};
```

- Induktion nach $n = m(S)$.
- Für $n = 0$ gilt $S = \emptyset$ oder $S = \{\square\}$
- Ist $\{L\} \in S$ dann gilt:
  S ist erfüllbar gdw $\text{red}_{\{L\}}(S)$ ist erfüllbar
- Für $P \in \text{atom}(S)$ gilt
  S ist erfüllbar gdw S_P oder $S_{\neg P}$ ist erfüllbar.

Beobachtung

Für jede Klauselmenge S und Atom P gilt

- $red_{\{\ \ P\}}(S) = S[1/P]$

Beobachtung

Für jede Klauselmenge S und Atom P gilt

- $red_{\{\ \ P\}}(S) = S[1/P]$
- $red_{\{\neg P\}}(S) = S[0/P]$