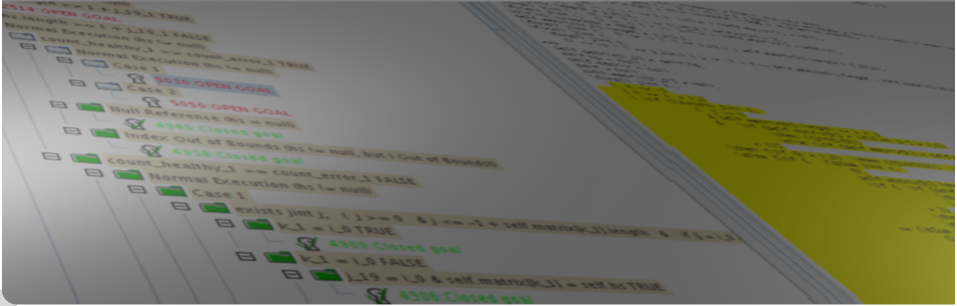
Formale Systeme

Binary Decision Diagrams

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Shannon Formeln

Shannon Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Semantik von *sh* für eine Interpretation I

$$val_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = \begin{cases} val_I(P_2) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = F \\ val_I(P_3) & \text{falls} \quad val_I(P_1) = W \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

$val_I(P_1)$	W	W	W	W	F	F	F	F
$val_I(P_2)$	W	W	F	F	**W**	**W**	**F**	**F**
$val_I(P_3)$	**W**	**F**	**W**	**F**	W	F	W	F
$val_I(sh(P_1, P_2, P_3))$	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**

Eigenschaften des *sh*-Operators

- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
- $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)$
- $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$
- $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
- $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
- $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
- $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
- $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
- $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$ $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
- $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$

Normierte Shannon Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

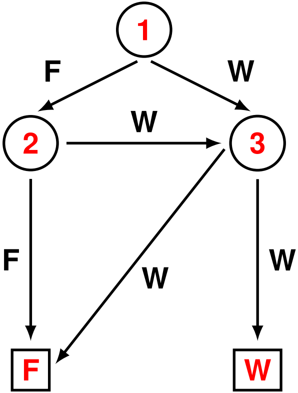
1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in A oder B vorkommende Aussagenvariable P_j gilt $j > i$.

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine äquivalente normierte sh-Formel B.

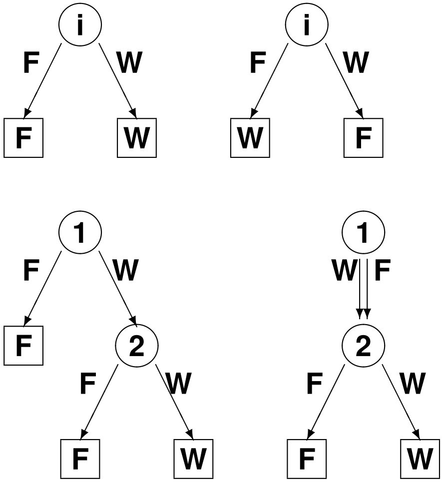
Shannon Graphen

Shannon Graphen



Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph. Jedem nichtterminalen Knoten v ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet. Von jedem nichtterminalen Knoten v gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit **F**, die andere mit **W** gekennzeichnet. Jedem terminalen Knoten v ist mit **F** oder **W**

Weitere Beispiele von Shannon Graphen

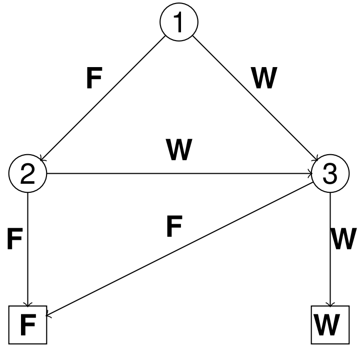


Shannon Graphen und Boolesche Funktionen

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante **F**, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert F hat, sonst der Kante **W**.
- Der Wert des terminalen Knotens ist der gesuchte Funktionswert.

Shannongraph als Boolesche Funktion

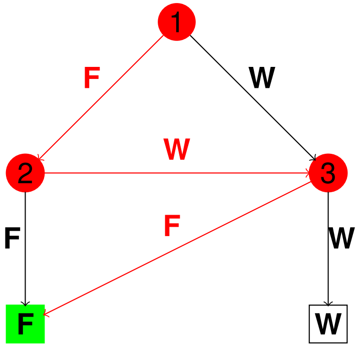
G:



$f_G(F, W, F) =?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

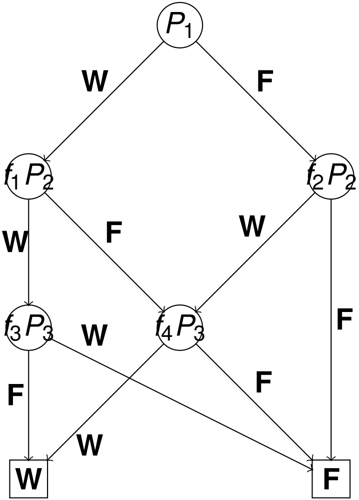
G:



$f_G(F, W, F) = ?F$

Konstruktion von Shannon Graphen

Beispiel



$$f(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{card}(\{1 \leq i \leq 3 \mid P_i = W\}) = 2 \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_1(P_2, P_3) = f(W, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } (P_2 = W \text{ und } P_3 = F) \text{ oder} \\ & (P_2 = F \text{ und } P_3 = W) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(P_2, P_3) = f(F, P_2, P_3) = \begin{cases} W & \text{falls } P_2 = P_3 = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_3(P_3) = f(W, W, P_3) &= \neg P_3 \\ f_4(P_3) = f(W, F, P_3) &= P_3 \\ f_5(P_3) = f(F, F, P_3) &= F \\ f_6(P_3) = f(F, W, P_3) &= P_3 \end{aligned}$$

card(X) = Anzahl der Element in der Menge X

Shannon Graphen vs normierte Shannon Formeln

Es gibt eine offensichtliche Korrespondenz zwischen

Shannon Graphen

und

normierten Shannon Formeln:

n-te Variable entspricht Knoten mit Index n

Von jetzt an betrachten wir nur noch Shannon Graphen.

Reduzierte Shannon Graphen

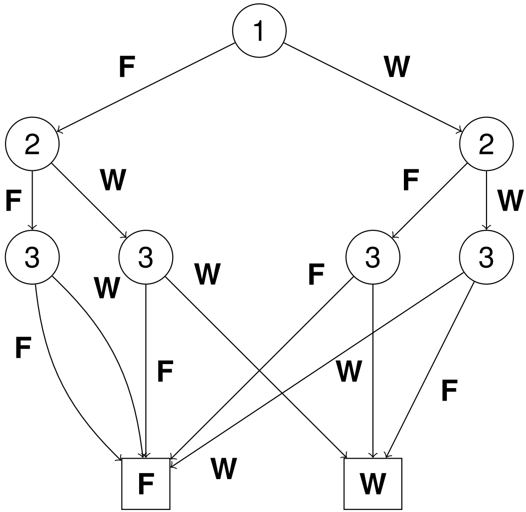
Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

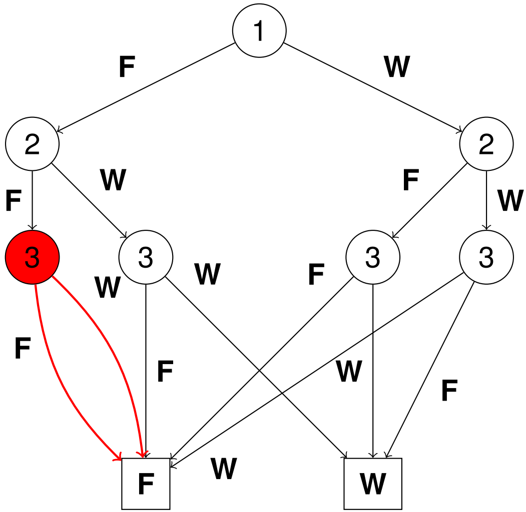
1. es keine zwei Knoten v und w ($v \neq w$) gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
2. es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

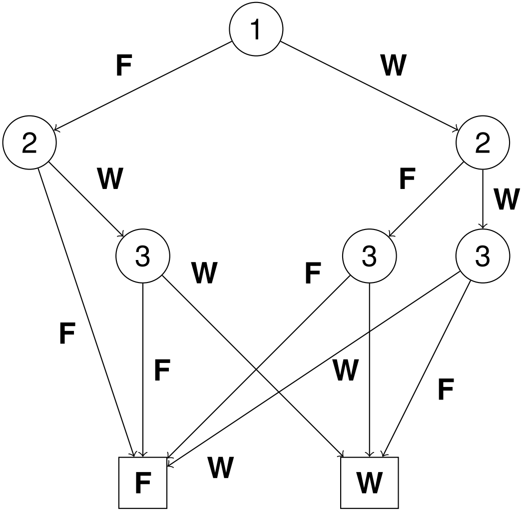
Ein Beispiel



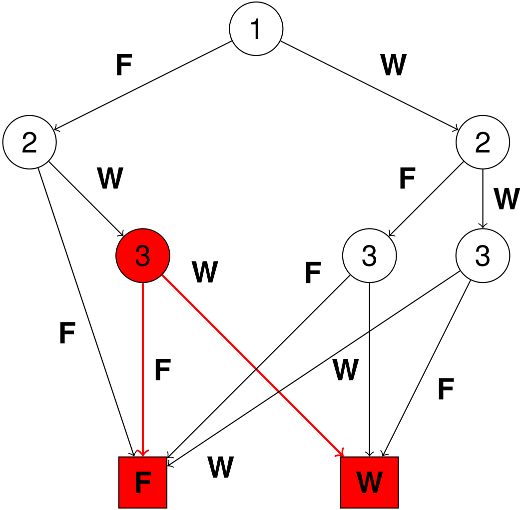
Doppelte Kanten



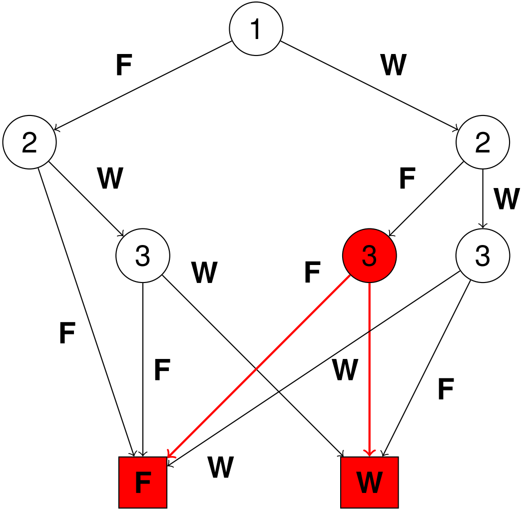
Elimination doppelter Kanten



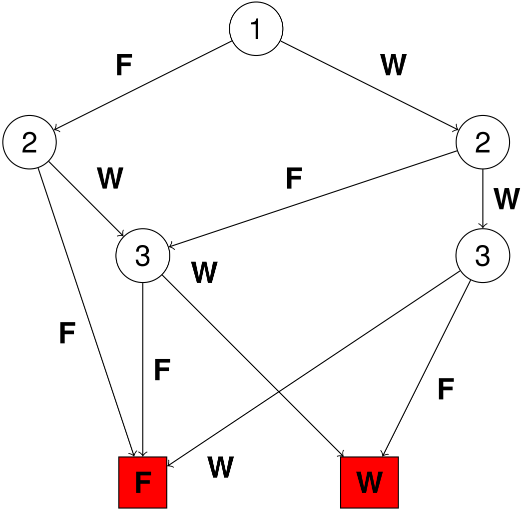
Isomorphe Teilgraphen



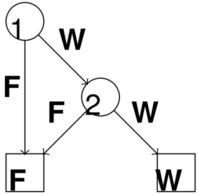
Isomorphe Teilgraphen

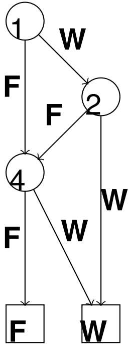


Reduktion isomorpher Teilgraphen



Weitere Beispiele





Isomorphie von Shannon Graphen

Definition

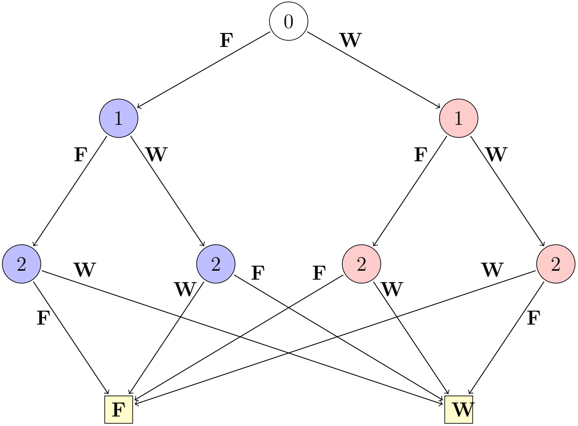
Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2.
H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $\mathit{wert}(k) = \mathit{wert}(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
3. Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen **F**-Kante/**W**-Kante zu dem Knoten k_0/k_1 führt, gilt: die **F**-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die **W**-Kante zu $\pi(k_1)$.

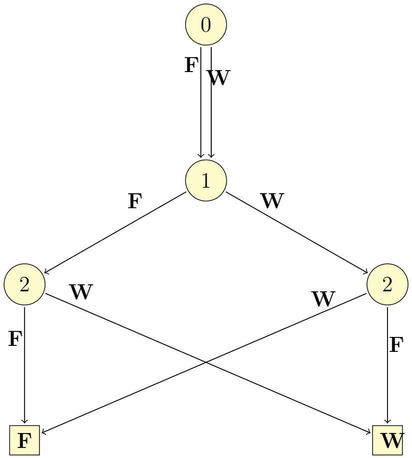
Einfachstes Beispiel isomorpher Shannon Graphen

Komplexeres Beispiel

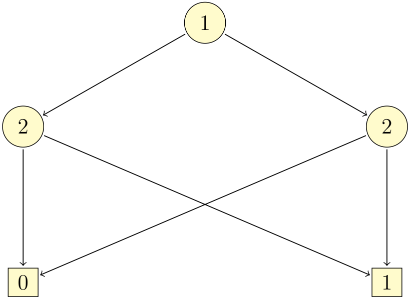
Isomorphismus π : $1 \longrightarrow 1$



Reduktion bezgl π



Letzte Reduktion



Ein Kriterium für Reduziertheit

Theorem

Sei G ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten v, w gilt

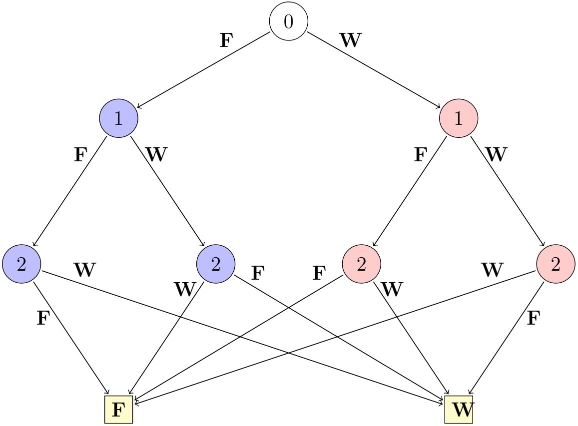
wenn	*die* **W**-*Nachfolger von v und w gleich sind und*
	die **F**-*Nachfolger von v und w gleich sind*
dann	$v = w$

Dann erfüllt G die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar x, y von Knoten gilt

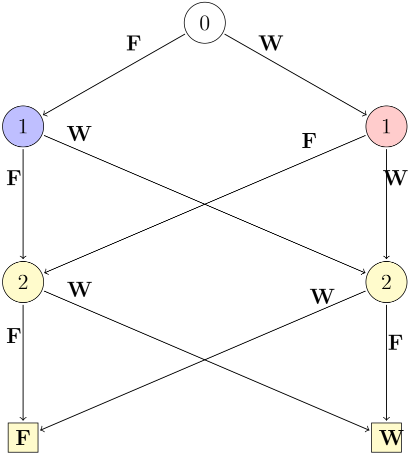
wenn	G_x *isomorph zu* G_y *ist*
dann	$x = y$

Komplexeres Beispiel (nochmal)

Isomorphismus π : 1 ⟶ 1



Inkrementelle Reduktion



Eindeutigkeit reduzierter Shannon Graphen

Theorem

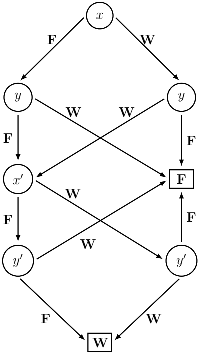
Sind G, H reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, dann gilt

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

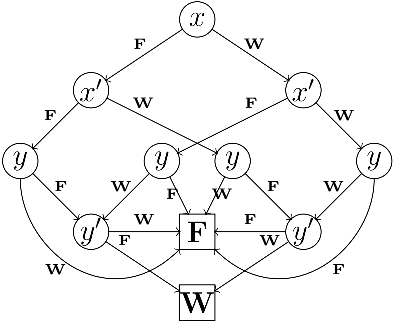
(Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen H mit $f = f_H$).

Abhängigkeit von der Variablenordnung

Zwei BDDs für $(x \longleftrightarrow y) \land (x' \longleftrightarrow y')$



Ordnung:
$x < y < x' < y'$



Ordnung:
$x < x' < y < y'$

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Theorem

Für jede Ordnung $<$ der Variablen in X gibt es einen Index $0 \leq i < 2k$, so dass der BDD $B_{Mult_i,<}$ mindestens $2^{k/8}$ Knoten besitzt.