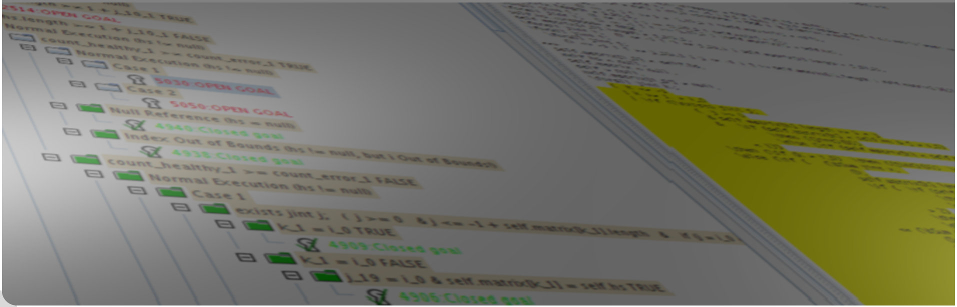
Formale Systeme

Aussagenlogik: Normalformen

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Disjunktive und Konjunktive Normalform

Definition

- Ein Literal ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Fakten

1. Zu jeder aussagenlogischen Formel *A* gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
2. Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
3. Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.

Fakten (Fortsetzung)

1. Eine disjunktive Normalform $\bigvee_{K \in \mathcal{K}} K$ in der Signatur Σ heißt *vollständig* falls für jedes $P \in \Sigma$ in jeder Klausel $K \in \mathcal{K}$ eines der Literale P oder $\neg P$ in K vorkommt.
2. Vollständige Normalformen sind eindeutig bis auf Umordnung.

1. Eine disjunktive Normalform $D = \bigvee_{K \in \mathcal{K}} K$ heißt *minimal* falls jede *kürzere* Formel D' nicht äquvalent zu D ist. $D' = \bigvee_{K' \in \mathcal{K}'} K'$, heißt *kürzer* als D falls für alle $K' \in \mathcal{K}'$ ein $K \in \mathcal{K}$ existiert mit K' ist Teilformel von K.
2. Minimale disjunktive und konjunktive Normalformen einer Formel sind nicht eindeutig.

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \ldots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n \quad = \quad (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von $\neg A_n$ ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \ldots, n \to \{1, 2\}\}.$$

Fortsetzung des Beispiels

Für $n = 3$ ist das:

$$
\begin{array}{l}
(P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\
(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge \\
(P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\
(P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2})
\end{array}
$$

In $\neg A_n$ treten $2 * n$ Literale auf, in der KNF $n * 2^n$.

Konstruktion der kurzen KNF

Allgemeines Beispiel

Eingabe: $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \ldots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$
\begin{array}{lcl}
Q_1 & \leftrightarrow & \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\
 & \vdots & \\
Q_i & \leftrightarrow & \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\
 & \vdots & \\
Q_n & \leftrightarrow & \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\
Q_{n+1} & \leftrightarrow & Q_1 \vee Q_2 \\
Q_{n+2} & \leftrightarrow & Q_{n+1} \vee Q_3 \\
 & \vdots & \\
Q_{2n-1} & \leftrightarrow & Q_{2n-2} \vee Q_n \\
\neg A_n & \leftrightarrow & \neg Q_{2n-1}
\end{array}
$$

Konstruktion der kurzen KNF

2. Schritt: Auflösung der Äquivalenzen

$$
\begin{array}{l|l}
\vdots & \vdots \\
Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} & (\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})) \quad \wedge \\
 & (\quad Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}) \\
\vdots & \vdots \\
Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 & (\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \quad \wedge \\
 & (\quad Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)) \\
\vdots & \vdots \\
Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n & (\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \quad \wedge \\
 & (\quad Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)) \\
 & \\
\neg A_n & \neg Q_{2n-1}
\end{array}
$$

Konstruktion der kurzen KNF

3. Schritt: Konjunktive Normalform

$\vdots$	$\vdots$
$(\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})) \quad \wedge$	$(\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2})) \quad \wedge$
$(\quad Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2})$	$(\quad Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2})$
$\vdots$	$\vdots$
$(\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \quad \wedge$	$(\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2) \quad \wedge$
$(\quad Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2))$	$(\quad Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2))$
$\vdots$	$\vdots$
$(\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \quad \wedge$	$(\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n) \quad \wedge$
$(\quad Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n))$	$(\quad Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee \neg Q_n))$
$\neg Q_{2n-1}$	$\neg Q_{2n-1}$

Konstruktion der kurzen KNF

Konkretes Beispiel

Eingabe:
$A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$
Berechne KNF für $\neg A_3$

1. Schritt:

$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$
$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$
$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$
$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$
$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$
$\neg Q_5$

2. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$
$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$
$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$
$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$
$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$
$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$
$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$
$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$
$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$
$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$

Konstruktion der kurzen KNF (Forts.)

2. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$
$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$
$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$
$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$
$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$
$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$
$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$
$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$
$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$
$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$
$\neg Q_5$

3. Schritt:

$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$
$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$
$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$
$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$
$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$
$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$
$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$
$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$
$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$
$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$
$\neg Q_5$

Satz

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A mit n Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform A_{kknf}, so dass

- *A ist erfüllbar gdw A_{kknf} erfüllbar ist,*
- *A_{kknf} enthält höchstens $c * n$ Literalvorkommen für eine von n unabhängige Konstante c,*
- *A_{kknf} effektiv aus A in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*