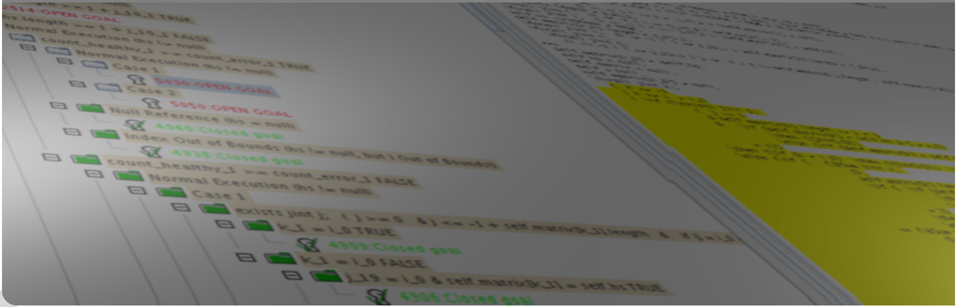
Formale Systeme

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Das Craigsche Interpolationslemma

Seien A,B aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \rightarrow B$$

dann gibt es eine Formel C mit

$$\models A \rightarrow C \quad \text{und} \quad \models C \rightarrow B,$$

so dass in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.
- Ebenso $P_1 \rightarrow P_1 \vee P_3$.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \to P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \to P_1$.
- Ebenso $P_1 \to P_1 \vee P_3$.
- Also: P_1 ist eine Interpolante für $P_1 \wedge P_2 \to P_1 \vee P_3$.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} A[c_1, \ldots, c_n]$$

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} A[c_1, \ldots, c_n]$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß C tatsächlich eine Interpolante ist.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$ mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] = P_1 \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow P_1$

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$ mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] = P_1 \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow P_1$
- $A[\mathbf{0}] = P_1 \wedge \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] = P_1 \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow P_1$
- $A[\mathbf{0}] = P_1 \wedge \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$.
- $C = A[\mathbf{1}] \vee A[\mathbf{0}] \leftrightarrow P_1 \vee \mathbf{0} \leftrightarrow P_1$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \to B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \to B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \to B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \rightarrow B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \to B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{1}] & = & (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \neg P_3 \wedge P_2 \end{array}$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \to B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \quad$ und $\quad B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{1}] & = & (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \neg P_3 \wedge P_2 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{0}] & = & (\mathbf{0} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{0} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \neg P_2 \wedge \mathbf{1} \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- Sei $A \rightarrow B$
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \quad$ und $\quad B \leftrightarrow \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{1}] & = & (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \neg P_3 \wedge P_2 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{0}] & = & (\mathbf{0} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{0} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \neg P_2 \wedge \mathbf{1} \wedge P_2 \\ & \leftrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$
- Also $C = (\neg P_3 \wedge P_2) \vee \mathbf{0} \leftrightarrow \neg P_3 \wedge P_2$
  ist eine Interpolante für $A \rightarrow B$.

Die R.L.Moore Methode

Ein Unterichtsmethode für Mathematikvorlesungen an Universitäten, in der die Studenten das Material selbst präsentieren und Beweise selbst finden.

Craigsche Interpolation - Beweis

1. Wieso kommen in jedem $A[c_1, \ldots, c_n]$ nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?

Craigsche Interpolation - Beweis

1. Wieso kommen in jedem $A[c_1, \ldots, c_n]$ nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
2. Wieso kommen in jedem C nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?

Craigsche Interpolation - Beweis

1. Wieso kommen in jedem $A[c_1, \ldots, c_n]$ nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
2. Wieso kommen in jedem C nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
3. Wie oben definiert, gehe die Formel $A[c_1]$ aus A hervor, indem jedes Vorkommen von P_1 durch die Konstante $c_1 \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ ersetzt wird. Sei weiterhin I eine Interpretation mit $val_I(A) = \mathbf{W}$. Wie muß man c_1 wählen, damit $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt?

Craigsche Interpolation - Beweis

1. Wieso kommen in jedem $A[c_1, \ldots, c_n]$ nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
2. Wieso kommen in jedem C nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
3. Wie oben definiert, gehe die Formel $A[c_1]$ aus A hervor, indem jedes Vorkommen von P_1 durch die Konstante $c_1 \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ ersetzt wird. Sei weiterhin I eine Interpretation mit $val_I(A) = \mathbf{W}$. Wie muß man c_1 wählen, damit $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt?
4. Die Situation sei wie in Frage 3. Wie muß man c_i, $1 \leq i \leq n$ wählen, damit $val_I(A[c_1, \ldots, c_n]) = \mathbf{W}$ gilt?

Craigsche Interpolation - Beweis

1. Wieso kommen in jedem $A[c_1, \ldots, c_n]$ nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
2. Wieso kommen in jedem C nur aussagenlogische Variablen vor, die A und B gemeinsam sind?
3. Wie oben definiert, gehe die Formel $A[c_1]$ aus A hervor, indem jedes Vorkommen von P_1 durch die Konstante $c_1 \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ ersetzt wird. Sei weiterhin I eine Interpretation mit $val_I(A) = \mathbf{W}$. Wie muß man c_1 wählen, damit $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt?
4. Die Situation sei wie in Frage 3. Wie muß man c_i, $1 \leq i \leq n$ wählen, damit $val_I(A[c_1, \ldots, c_n]) = \mathbf{W}$ gilt?
5. Wieso folgt $\models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ aus der Antwort auf Frage 4?

Craigsche Interpolation - Beweis (Forts.)

6. Wenn für eine Wahl von c_1 und eine Interpretation I gilt $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt dann auch $val_I(A) = \mathbf{W}$?

Craigsche Interpolation - Beweis (Forts.)

6. Wenn für eine Wahl von c_1 und eine Interpretation I gilt $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt dann auch $val_I(A) = \mathbf{W}$?
7. Für eine beliebige Konstante c_1 und eine beliebige Interpretation gelte $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$. Finden Sie eine Interpretation I_1, so daß $val_{I_1}(A) = \mathbf{W}$ gilt.

Craigsche Interpolation - Beweis (Forts.)

6. Wenn für eine Wahl von c_1 und eine Interpretation I gilt $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt dann auch $val_I(A) = \mathbf{W}$?
7. Für eine beliebige Konstante c_1 und eine beliebige Interpretation gelte $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$. Finden Sie eine Interpretation I_1, so daß $val_{I_1}(A) = \mathbf{W}$ gilt.
8. Erweitern Sie die Konstruktion aus der vorangegangenen Frage auf beliebig vielen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$.

Craigsche Interpolation - Beweis (Forts.)

6. Wenn für eine Wahl von c_1 und eine Interpretation I gilt $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt dann auch $val_I(A) = \mathbf{W}$?
7. Für eine beliebige Konstante c_1 und eine beliebige Interpretation gelte $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$. Finden Sie eine Interpretation I_1, so daß $val_{I_1}(A) = \mathbf{W}$ gilt.
8. Erweitern Sie die Konstruktion aus der vorangegangenen Frage auf beliebig vielen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$.
9. Seien I und J Interpretationen, so daß $val_J(B) = \mathbf{W}$ gilt und für alle aussagenlogischen Variablen P in B gilt $I(P) = J(P)$. Was können Sie über $val_I(B)$ daraus schließen?

Craigsche Interpolation - Beweis (Forts.)

6. Wenn für eine Wahl von c_1 und eine Interpretation I gilt $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$ gilt dann auch $val_I(A) = \mathbf{W}$?
7. Für eine beliebige Konstante c_1 und eine beliebige Interpretation gelte $val_I(A[c_1]) = \mathbf{W}$. Finden Sie eine Interpretation I_1, so daß $val_{I_1}(A) = \mathbf{W}$ gilt.
8. Erweitern Sie die Konstruktion aus der vorangegangenen Frage auf beliebig vielen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$.
9. Seien I und J Interpretationen, so daß $val_J(B) = \mathbf{W}$ gilt und für alle aussagenlogischen Variablen P in B gilt $I(P) = J(P)$. Was können Sie über $val_I(B)$ daraus schließen?
10. Wie helfen Ihnen die Antworten zu 8 und 9 um $\models \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$ zu zeigen? Hinweis: Irgendwann einmal muß man von der Voraussetzung des Lemmas Gebrauch machen.