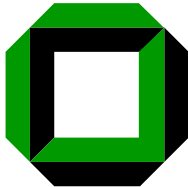


Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008



Themen



Wiederholung

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Reduktionssysteme
- Logik zweiter Stufe
- Modale Logik
- Büchi Automaten
- LTL
- Modellprüfung (model checking)



Aussagenlogik



Was Sie wissen sollten

Aussagenlogik, Syntax und Semantik

- Definitionen der logischen Grundbegriffe beherrschen
- Definition der verschiedenen Normalformen
- Craigscher Interpolationssatz
- Gegebene Formeln in Normalformen transformieren



Was Sie wissen sollten

Aussagenlogik, Kalküle

- Resolutionskalkül, Tableaukalkül, Davis-Putnam Verfahren
- für kleinen Beispiele Ableitungen finden können
- Beweisidee für den Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweis des Resolutions- und des Tableaukalküls wiedergeben.
- Tableauregeln aus Wahrheitstafeln konstruieren.
- Definition von Hornklausel kennen, Erfüllbarkeitstest für Hornklauseln durchführen können.
- Einfache Anwendungen durch aussagenlogische Formeln formalisieren können.



Kurze Konjunktive Normalform

Wir haben im Skriptum und auf den Folien keine Definition der kurzen konjunktiven Normalform gefunden?

Antwort

Das ist korrekt.

Es wird im Skript und auf den Folien ein allgemeines Verfahren beschrieben, aber keine Definition gegeben.

Eine Definition könnte etwa wie folgt aussehen:

Eine *kurze konjunktive Normalform* zu einer aussagenlogischen Formel F ist eine Formeln F' in konjunktiver Normalform, so daß

- F und F' erfüllbarkeitsäquivalent sind
- Ist n die Länge von F , dann hat F' eine Länge $\leq n^2$.



Prädikatenlogik



Was Sie wissen sollten

Prädikatenlogik, Syntax und Semantik

- Definition der Formeln und der Strukturen für PK1
- Begriff der Substitution kennen und anwenden können.
- Den Begriff *Unifikation* kennen und den Unifikator einfacher Terme berechnen können.
- Die logischen Grundbegriffe beherrschen
- Einfache semantische Tautologien erkennen können
- Definition der verschiedenen Normalformen
- Gegebene Formeln in Normalformen transformieren
- Die Aussage des Substitutionslemmas kennen
- Den Satz von Herbrand kennen



Was Sie wissen sollten

Prädikatenlogik, Kalküle

- Resolutions- und Tableaukalkül kennen und einfache Beweise in diesen Kalkülen ausführen können
- Beweisidee für den Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweis des Tableaukalküls wiedergeben.
- Einfache Sachverhalte in PL1 formalisieren können



Nullsemantik

Definition und Aufgabestellung

In der Definition 4.25 einer prädikatenlogischen Interpretation war verlangt worden, dass nur nichtleere Mengen als Trägermengen D auftreten können. Für die Zwecke dieser Übungsaufgabe wollen wir diese Einschränkung fallen lassen und auch $D = \emptyset$ zulassen. Wir nennen dies die *Nullsemantik*.

- 1 Geben Sie ein Beispiel für eine Formel an, die in der üblichen Semantik allgemeingültig ist, aber in der Nullsemantik nicht.
- 2 Wenn man den in der Vorlesung beschriebenen Tableaukalkül für die Nullsemantik benutzt, welche Eigenschaft geht dabei verloren: die Vollständigkeit oder die Korrektheit? Begründen Sie.
- 3 Wie muß das Tableauverfahren abgeändert werden, damit es vollständig und korrekt bezüglich der Nullsemantik ist?
Hinweis: Eine Regel ist zu modifizieren.



Nullsemantik

Aufgabe 1

Geben Sie ein Beispiel für eine Formel an, die in der üblichen Semantik allgemeingültig ist, aber in der Nullsemantik nicht.

$$(\forall x p(x)) \rightarrow \exists x p(x)$$

ist allgemeingültig in der üblichen Semantik,
in der Interpretation mit leerer Trägermenge aber falsch.

Das liegt daran, daß jede universell quantifizierte Variable in jeder Struktur mit leerem Universum wahr ist.



Nullsemantik

Aufgabe 2

Wenn man den in der Vorlesung beschriebenen Tableaukalkül für die Nullsemantik benutzt, welche Eigenschaft geht dabei verloren: die Vollständigkeit oder die Korrektheit? Begründen Sie.

Die Menge der erlaubten Interpretation ist für die Nullsemantik (um genau ein Element) größer. Also ist jede allgemeingültige Formel in der Nullsemantik auch allgemeingültig im bisherigen Sinne. Der unveränderte Tableaukalkül ist also weiterhin vollständig.

Er ist aber für die Nullsemantik nicht mehr korrekt. Das Tableau mit der Wurzelmarkierung $0 \forall x p(x) \rightarrow \exists x p(x)$ kann geschlossen werden, aber $\forall x p(x) \rightarrow \exists x p(x)$ ist keine Tautologie in der Nullsemantik.



Nullsemantik

Aufgabe 3

Wie muß das Tableauverfahren abgeändert werden, damit es vollständig und korrekt bezüglich der Nullsemantik ist?

Hinweis: Eine Regel ist zu modifizieren.

Die γ -Regel muß eingeschränkt werden zu:

γ^0 -Regel

Die γ -Regel, darf auf einem Pfad π nur angewendet werden, wenn

- in den Formeln von π mindestens ein Konstantensymbol vorkommt oder
- auf π bereits eine δ -Regel auf eine Formel ohne freie Variablen angewendet wurde.



Nullsemantik

Die modifizierte γ^0 -Regel

Das folgende Tableau kann nach dieser Regel nicht geschlossen werden:

- (1) $0\forall xp(x) \rightarrow \exists xp(x)$
- (2) $1\forall xp(x)$
- (3) $0\exists xp(x)$

Die Anwendungen der γ -Regeln in den Zeilen 2 und 3 erfüllen nicht die Einschränkungen der γ^0 -Regel.



Nullsemantik

Vollständigkeitsbeweis für γ^0 -Regel

Der ursprüngliche Kalkül war bezgl. der Nullsemantik vollständig aber nicht korrekt.

Für den Kalkül mit der modifizierten γ -Regel beweisen wir hier die Vollständigkeit. Sei π ein offener Pfad eines erschöpften Tableaus über $M \cup \{\neg A\}$. Wir wollen eine Struktur $\mathcal{D}_0$ mit leerem Universum finden, die alle Formeln von π erfüllt.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß auf π kein Konstantenzeichen vorkommt. Wir setzen für null-stellige Prädikatenzeichen p

$$\mathcal{D}_0 \models p \iff 1p \text{ kommt auf } \pi \text{ vor}$$

Auf π kommen nur null-stellige atomare Formeln, universell quantifizierte Formeln ohne freie Variable oder aussagenlogische Kombinationen von diesen vor.

Für atomare Formeln gilt $\mathcal{D}_0 \models F$ nach Def.

Mit $\forall$ beginnenden Formeln sind in $\mathcal{D}_0$ wahr wegen des leeren Universums. Der restliche induktive Beweis geschieht wie in der AL.



Der Modellegriff

Den Modell und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen.

Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall.

Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt.

Sollten in einer Klausuraufgabe Formeln mit freien Variablen betrachtet werden, wird darauf explizit hingewiesen.

Das weicht von der Praxis zurückliegender Klausuren ab.

Definition

- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ , wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.
- $\mathcal{D}$ heißt **Modell** einer Formelmenge M ohne freie Variablen, wenn für jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D}}(B) = W$.



Reduktionssysteme



Was Sie wissen sollten

- Wichtigsten Eigenschaften von Reduktionssystemen und die Zusammenhänge zwischen ihnen kennen
- Gerichtete Termersetzungssystem kennen und kleine Beispiel rechnen können.



Logik zweiter Stufe



Was Sie wissen sollten

Logik zweiter Stufe

- Formeln in der Logik zweiter Stufe lesen und interpretieren können
- einfache Sachverhalte durch Formeln der Logik zweiter Stufe formalisieren können
- Unterschiede in der Ausdruckstärke zur Logik erster Stufe benennen können



OCL



Was Sie wissen sollten

- grundlegende Konzepte von OCL kennen
- einfache OCL Ausdrücke lesen und in prädikatenlogische Formeln oder natürliche Sprache übersetzen können
- einfache Sachverhalte in OCL formalisieren können



Modale Logik



Was Sie wissen sollten

- Definition von Syntax und Semantik (Kripke Strukturen) beherrschen.
- Allgemeingültige Formeln erkennen können, auch für Allgemeingültigkeit relativ zu Kripke Strukturen mit Einschränkungen an die Zugänglichkeitsrelation R .
- Für einfache Eigenschaften von R charakterisierende Formeln finden.



Büchi Automaten



Was Sie wissen sollten

- Definition eines Büchi-Automaten kennen
- Einen Büchi-Automaten, der eine vorgegebene Sprache akzeptiert, konstruieren können.
- Zu einem gegebenen Büchi-Automaten die akzeptierte Sprache bestimmen können.
- Abschlußeigenschaften ω -regulärer Mengen kennen.



Abgeschlossenheit unter Iteration

Für den Automat $\mathcal{A}$ sei $K = L(\mathcal{A})$.

Finde $\mathcal{B}$ mit $L^\omega(\mathcal{B}) = K^\omega$.

$\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} Q_B &= Q_A \\ s_0^B &= s_0^A \\ \delta_B(q, a) &= \delta_A(q, a) \quad \text{falls } q \in Q_B \\ \delta_B(q, \epsilon) &= \{s_0^B\} \quad \text{falls } q \in F_A \\ F_B &= \{s_0^B\} \end{aligned}$$

Wie kann der spontane ϵ Übergang vermieden werden?



Abgeschlossenheit unter Iteration

Ohne ϵ Übergang

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, so daß für jeden Endzustand q_f des Automat $\mathcal{A}$ und jeden Buchstaben x des Vokabulars $\delta_A(q_f, x) = \emptyset$ gilt.

Der Automat $\mathcal{B}$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Q_B &= Q_A \\ s_0^B &= s_0^A \\ \delta_B(q, x) &= \delta_A(q, x) && \text{falls } q \notin F_A, x \in V \\ \delta_B(q, x) &= \delta_A(q, x) \cup \delta_A(s_0^A, x) && \text{falls } q \in F_A, x \in V \\ F_B &= F_A \end{aligned}$$

Es gilt $L^\omega(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$.



LTL



Was Sie wissen sollten

- LTL-Formeln lesen können
- Einfache temporale Eigenschaften in LTL formalisieren können.
- Zusammenhang zwischen LTL und Büchi Automaten kennen.
- Für einfache LTL Formeln den zugehörigen Büchi Automaten konstruieren können und umgekehrt.
- Konzept der LTL Modellprüfung kennen.



Übungsblatt 12, Aufgabe 3

Zusammenhang zwischen omega-Struktur und Kripkestruktur

Eine **omega-Struktur** $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, <)$ interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$ mit der Intention $p \in \xi(n) \Leftrightarrow$ in $\mathcal{R}$ ist p zum Zeitpunkt n wahr.

$\xi \models \Diamond A$ gdw es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$

Will man eine Kripkestruktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ angeben, so daß die Bedeutung des $\Diamond$ Operators erhalten bleibt, so setzt man:

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{N} \\ R(x, y) &\leftrightarrow x \leq y \\ I(p, s) = W &\leftrightarrow p \in \xi(s) \end{aligned}$$



Beispiel

zur allgemeinen Konstruktion

$$B = \Diamond \Box p$$

$$B = 1 \text{ U } \Box p$$

$$B = 1 \text{ U } \neg(\neg 0 \text{ U } \neg p)$$

$$B = 1 \text{ U } (0 \text{ V } p)$$

$$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$$

$$\text{subFml}(B) = \{B, B_0 = 0 \text{ V } p, p, \quad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$$

$$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}\{B, p\}\{B_0, p\}\}$$

$$E_1 = 1 \text{ U } B_0 \text{ i.e. } A_1 = \mathbf{1}, B_1 = B_0$$

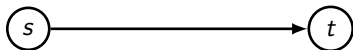
$$\mathcal{F} = \{F_1\}$$

$$F_1 = \{\{B_0\}, \{p\}, \{B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, B_0, p\}\}$$



Beispiel

Übergangsfunktion

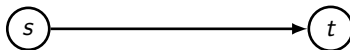


- ❶ Falls $A \mathbf{U} B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder $(A \in s \text{ und } A \mathbf{U} B \in t)$.
- ❷ Falls $A \mathbf{V} B \in s$, dann $(B \in s \text{ und } A \in s)$ oder $(B \in s \text{ und } A \mathbf{V} B \in t)$.
- ❸ Falls $1 \mathbf{U} B_0 \in s$, dann gilt $B_0 \in s$ oder $(1 \in s \text{ und } 1 \mathbf{U} B_0 \in t)$.
- ❹ Falls $0 \mathbf{V} p \in s$, dann $(p \in s \text{ und } 0 \in s)$ oder $(p \in s \text{ und } 0 \mathbf{V} p \in t)$.
- ❺ Falls $B \in s$, dann gilt $B_0 \in s$ oder $B \in t$.
- ❻ Falls $B_0 \in s$, dann $(p \in s \text{ und } B_0 \in t)$.



Beispiel

Übergangsfunktion



$B \in s, B_0 \notin s$

$B \in s, B_0 \in s$

$B_0 \in s, p \in s$

$B_0 \in s, p \notin s$

$B \in t$

keine Einschränkung

$B_0 \in t$

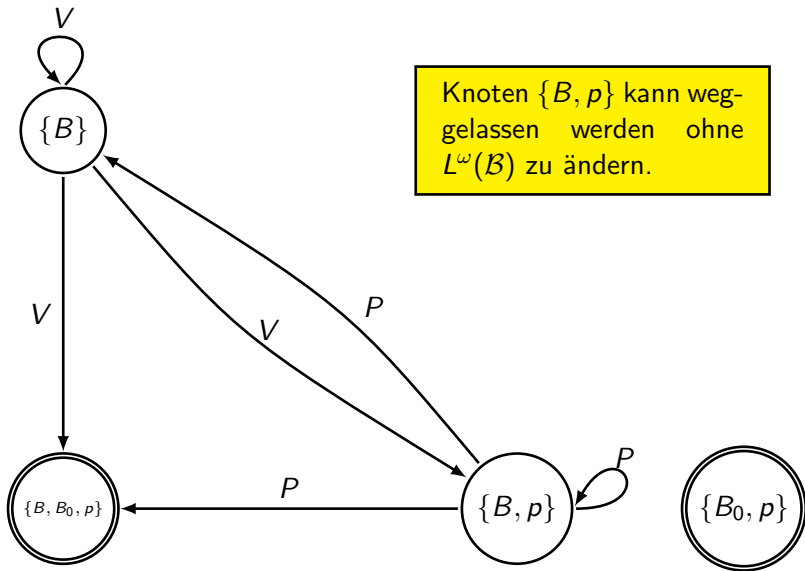
nicht möglich

$$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, p\}, \{B_0, p\}\}$$

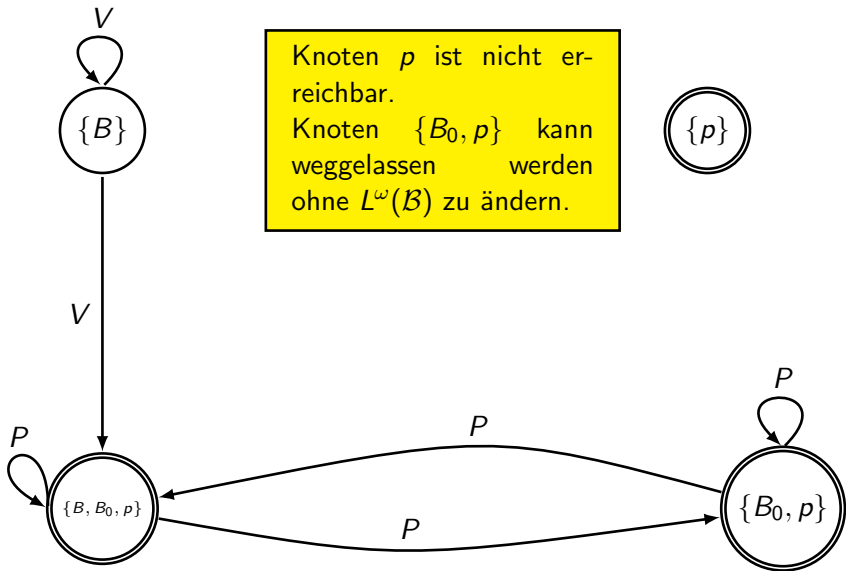
Sackgassen



Beispiel

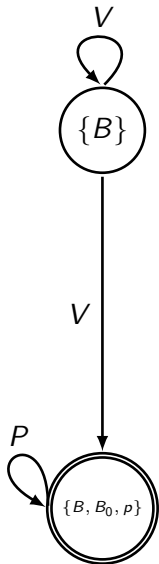


Beispiel



Beispiel

Endergebnis



Beide verbleibenden Zustände
sind Startzustände.
Man sieht aber, daß es genügt
 $\{B\}$ als Startzustand zu haben.



Allgemeines



Häufig gestellte Frage

Ist es erlaubt, jede einigermaßen verbreitete Notation zu verwenden, solange man an einem aktuellen Informatik Lehrbuch nachweisen kann, daß es diese Notation gibt?

Bitte, halten Sie sich an die in der Vorlesung und im Skriptum verwendete Notation.

Wir werden bei der Korrektur der Klausur versuchen flexibel zu sein. Das heißt aber nicht, daß wir alles akzeptieren können.



Häufig gestellte Frage

Werden in der Klausur Definitionen abgefragt wurden.

In der Regel werden Definitionen nicht direkt abgefragt, sondern Aufgaben gestellt, die voraussetzen, daß man die Definition kennt.

Sie können mit Ankreuzaufgaben im Wert von 10-12 Punkten aus 60 rechnen.



Häufig gestellte Frage

In alten Klausuren kommen fast ausschließlich Tableau - und Resolutionskalkül vor. Ist der Sequenzenkalkül ausgeschlossen?

Ja, es werden keine Klausuraufgaben zum Sequenzenkalkül in der Prädikatenlogik gestellt.



Häufig gestellte Frage

Wie soll man in der Klausur Sequenzen-, Tableau-, Resolutions oder DPLL-Beweise aufschreiben?

Antwort

Wir bestehen nicht auf einem normierten Format. Es sollte aber klar erkennbar sein, was sie gemacht haben.

z.B. für DPLL sollte klar sein (Terminologie von Blatt 4 Aufgabe 2)

- ob Sie einen `chooseLiteral` oder eine `unit_propagate` Schritt ausführen
- bei einem `chooseLiteral` Schritt sollte klar sein welches Literal Sie ausgewählt haben
- bei einem `unit_propagate` Schritt sollte klar sein welche Klauseln Sie ganz streichen und welches Literal Sie aus einer Klausel entfernen
- wann das Verfahren terminiert
- das Gesamtergebnis (Erfüllbarkeit, Nichterfüllbarkeit).

Format (Fortsetzung)

Antwort

- für die Notation von prädikatenlogischen Tableaubeweisen kann man sich an der Musterlösung zu Aufgabe 2 von Blatt 8 orientieren.
- für die Notation von prädikatenlogischen Resolutionsbeweisen kann man sich an der Musterlösung zu Aufgabe 3 von Blatt 6 orientieren.
- Wenn Sie mit Pfeilen innerhalb einer Herleitung andeuten wollen welche Formel(n) aus welcher Formel hervorgehen, seien Sie besonders sorgfältig. Diese Zeichnungen sind häufig für eine andere Person nicht so eindeutig wie man selber annimmt.



Häufig gestellte Frage

Wie kann man Prädikaten- und Funktionssymbole in einer Aufgabenstellung auseinanderhalten?

Antwort

In den meisten Fällen ist das explizit in der Signatur Σ vorgegeben. Diese Information kann man in den meisten Fällen auch erschließen.

$$(f(a, g(y)) \wedge u(p(x), q)) \rightarrow (a \doteq m(r) \vee \neg s(0, 0))$$

Prädikatszeichen: $f(-, -)$, $u(-, -)$, $s(-, -)$

Funktionszeichen: $a, q, r, 0$, $g(-)$, $p(-)$, $m(-)$,



Häufig gestellte Frage

Wie soll man argumentieren, wenn bei einer Unifikationsaufgabe zwei Terme nicht unifizierbar sind?

Antwort

Geben Sie den Grund für die Nichtunifizierbarkeit an, also z.B.

- nicht unifizierbar, weil führende Funktionszeichen verschieden sind
- nicht unifizierbar wegen Variablenbedingung (*occur clash*)
- unter Umständen sind erst einige Schritte im Robinsonschen Algorithmus durchzuführen bevor die Nichtunifizierbarkeit aus einem der beiden genannten Gründen ersichtlich wird.



ENDE

