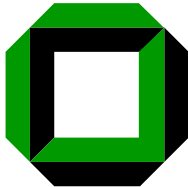


Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008



Vorlesungstermine

Do.31.01.

Fr.01.02.

Do.07.02. keine Vorlesung

Fr.08.02 keine Vorlesung

Do.14.02 (Wiederholung)

Fr.15.02. keine Vorlesung

1.Klausur 18.02. 14:00



Lineare Temporale Logik und Büchi Automaten



Omega-Strukturen (Wiederholung)

Eine **omega-Struktur** $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$



LTL und Büchi-Automaten

Für einen Automaten $\mathcal{B} = (S, V, s_0, \delta, F)$ mit $V = 2^\Sigma$, wobei $\Sigma =$ Menge aussagenlogischer Atome, können wir omega-Strukturen über Σ

ξ

und unendliche Wörter über V

$$w \in V^\omega$$

identifizieren.



Notation

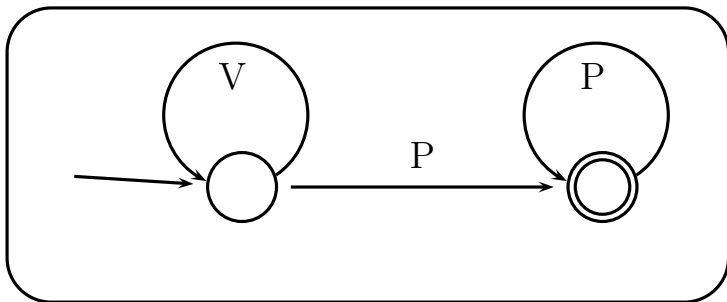
Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^\Sigma$
- $P = \{b \in V \mid p \in b\}$
- $Q = \{b \in V \mid q \in b\}$



Automat für $\Diamond\Box p$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{dbp}$



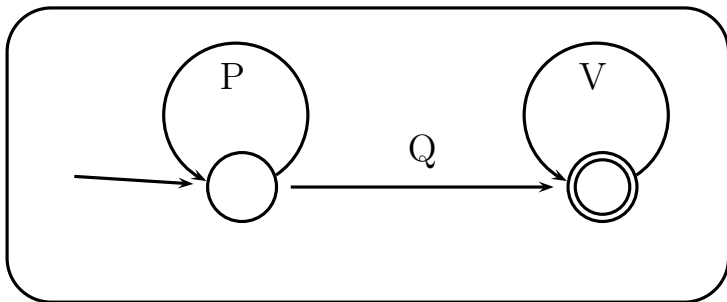
gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{dbp}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Diamond\Box p$$



Automat für $p \mathbf{U} q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{puntilq}$



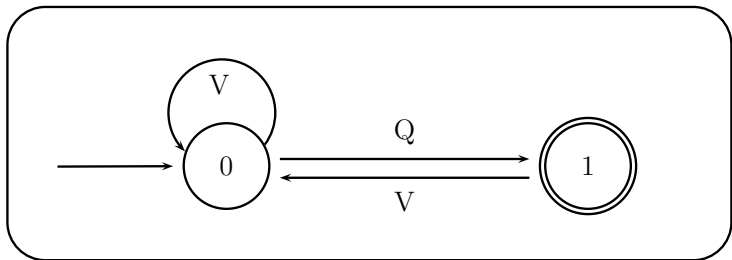
gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{puntilq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models p \mathbf{U} q$$



Automat für $\Box\Diamond q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{infq}$



gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{infq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Box\Diamond q$$



Lemma

Automat für Konjunktion

Seien

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= (S_1, V, s_1^0, \delta_1, F_1), \\ \mathcal{A}_2 &= (S_2, V, s_2^0, \delta_2, F_2)\end{aligned}$$

Büchi-Automaten,
 C_1, C_2 LTL-Formeln mit

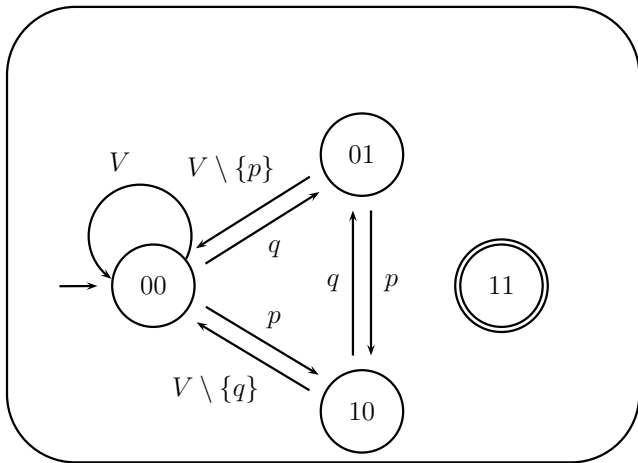
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\models C_1 \\ \mathcal{A}_2 &\models C_2\end{aligned}$$

Dann gibt es einen Büchi-Automaten $\mathcal{C}$ mit

$$\mathcal{C} \models C_1 \wedge C_2$$



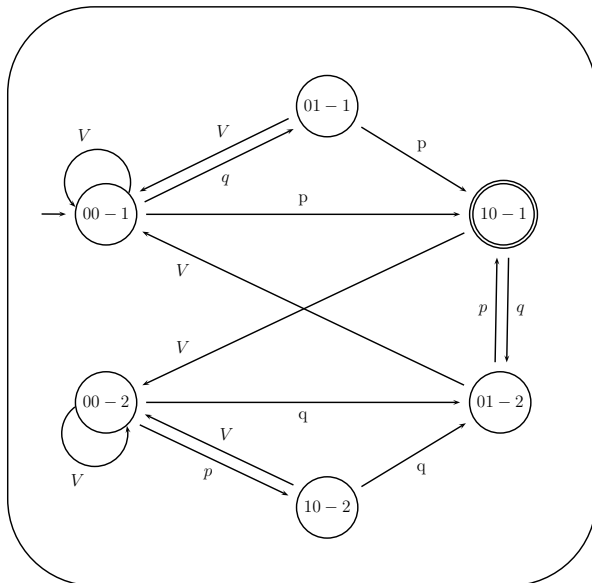
Direktes Produkt $\mathcal{A}_{infpq}$ von $\mathcal{A}_{infp}$ und $\mathcal{A}_{infq}$



$\mathcal{A}_{infpq} \models \Box \Diamond p \wedge \Box \Diamond q$? **Nein!** $L^\omega = \emptyset$



Automat für $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$



Allgemeine Konstruktion für Konjunktionsautomaten

Gegeben $\mathcal{A}_i = (S_i, s_i^0, \delta_i, F_i)$

Gesucht $\mathcal{C} = (S, s^0, \delta, F)$ mit $L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2)$.

$$S = S_1 \times S_2 \times \{1, 2\}$$

$$s^0 = (s_1^0, s_2^0, 1)$$

$$F = F_1 \times S_2 \times \{1\}$$

falls $s_1 \in F_1$

$$(t_1, t_2, 2) \in \delta((s_1, s_2, 1), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

falls $s_2 \in F_2$

$$(t_1, t_2, 1) \in \delta((s_1, s_2, 2), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

sonst

$$(t_1, t_2, i) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow i \in \{1, 2\}, \\ t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$



Theorem

Zu jeder LTL-Formel

$$B$$

gibt es einen Büchi-Automaten

$$\mathcal{A}_B$$

mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$$



Beweis

Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel B

P Menge der AL-Atome, B in Negationsnormalform

nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, **U**, **V**, X in B

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$$V = 2^P$$

$\text{subF}(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von B

$$S = \{s \subseteq \text{subF}(B) \mid \mathbf{0} \notin s, \mathbf{1} \in s \\ \text{wenn } (C_1 \wedge C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ und } C_2 \in s \\ \text{wenn } (C_1 \vee C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ oder } C_2 \in s \}$$

$$S_0 = \{s \in S \mid B \in s\}$$

$E_i = A_i \mathbf{U} B_i$ für $1 \leq i \leq k$ alle Fmln der Form $A \mathbf{U} B$ in $\text{subF}(B)$.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k\}$ mit

$$\mathcal{F}_i = \{s \in S \mid E_i \notin s \text{ oder } E_i \in s \text{ und } B_i \in s\}$$



Konstruktion

Die Übergangsfunktion δ

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

- ① Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
- ② Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.
- ③ Falls $X \ A \in s$ dann $A \in t$.
- ④ Falls $A \ \mathbf{U} \ B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder ($A \in s$ und $A \ \mathbf{U} \ B \in t$).
- ⑤ Falls $A \ \mathbf{V} \ B \in s$, dann ($B \in s$ und $A \in s$) oder ($B \in s$ und $A \ \mathbf{V} \ B \in t$).



Beispiel

$$B = \Diamond \Box p$$

$$B = 1 \text{ U } \Box p$$

$$B = 1 \text{ U } \neg(\neg 0 \text{ U } \neg p)$$

$$B = 1 \text{ U } (0 \text{ V } p)$$

$$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$$

$$\text{subFml}(B) = \{B, B_0 = 0 \text{ V } p, p, \quad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$$

$$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}\{B, p\}\{B_0, p\}\}$$

$$E_1 = 1 \text{ U } B_0 \text{ i.e. } A_1 = \mathbf{1}, B_1 = B_0$$

$$\mathcal{F} = \{F_1\}$$

$$F_1 = \{\{B_0\}, \{p\}, \{B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, B_0, p\}\}$$



Korollar

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Nach dem im vorangegangenen Satz beschriebenen Verfahren konstruiert man die Büchi Automaten $\mathcal{A}_B$ und $\mathcal{A}_{\neg B}$. Es gilt

$$B \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_B) \neq \emptyset$$

$$B \text{ ist allgemeingültig} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_{\neg B}) = \emptyset$$

Für jeden Büchi Automaten $\mathcal{C}$ ist die Frage $L^\omega(\mathcal{C}) = \emptyset?$ entscheidbar.



Vergleich der Ausdrucksstärke

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- ω -reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten beschreibbaren.

Äquivalent sind:

- LTL
- Prädikatenlogik erster Stufe
- stern-freie ω -reguläre Mengen



Allgemeine Zeitstrukturen

Gelegentlich werden allgemeinere Strukturen als omega-Strukturen als Semantik für LTL-Formeln benutzt.

Eine Zeitstruktur

$$\mathcal{R} = (S, R, \xi)$$

für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus

S	=	Menge abstrakter Zeitpunkte
R	=	strikte Quasiordnung auf S
$\xi : S \rightarrow 2^P$	=	Interpretation der Atome in P

