# *Formale Systeme*

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

# *Vorlesungstermine*

| |
|---|
| Do.31.01. |
| Fr.01.02. |
| Do.07.02. keine Vorlesung |
| Fr.08.02 keine Vorlesung |
| Do.14.02 (Wiederholung) |
| Fr.15.02. keine Vorlesung |
| 1.Klausur 18.02. 14:00 |

# Lineare Temporale Logik
# und
# Büchi Automaten

# *Omega-Strukturen (Wiederholung)*

Eine omega-Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur $P$ besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{ in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

# *LTL und Büchi-Automaten*

Für einen Automaten $\mathcal{B} = (S, V, s_0, \delta, F)$ mit $V = 2^{\Sigma}$, wobei $\Sigma$ = Menge aussagenlogischer Atome, können wir omega-Strukturen über $\Sigma$

$$\xi$$

und unendliche Wörter über $V$

$$w \in V^{\omega}$$

identifizieren.

# *Notation*

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur $\Sigma$ mit $p, q \in \Sigma$

# *Notation*

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur $\Sigma$ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$

# *Notation*

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur $\Sigma$ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$
- $P = \{b \in V \mid p \in b\}$

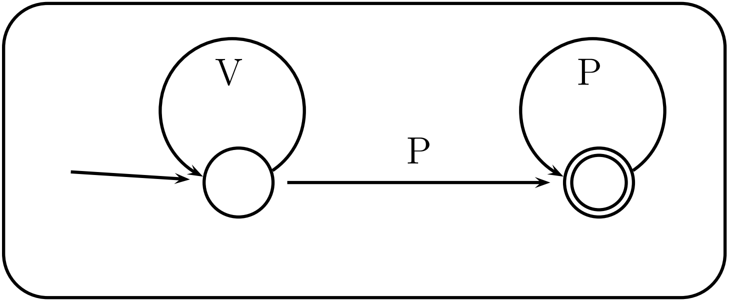
# *Notation*

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- eine aussagenlogische Signatur $\Sigma$ mit $p, q \in \Sigma$
- $V = 2^{\Sigma}$
- $P = \{b \in V \mid p \in b\}$
- $Q = \{b \in V \mid q \in b\}$

# *Automat für* $\Diamond\Box p$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{dbp}$

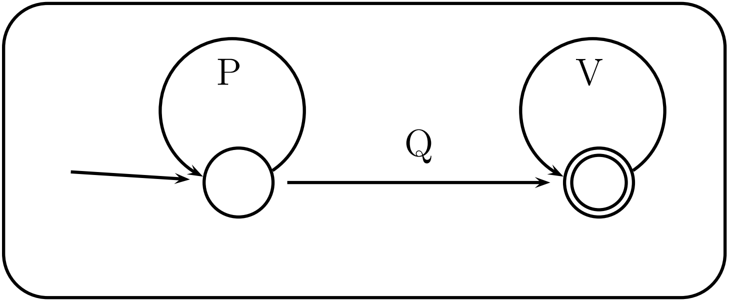



gilt

$$\xi \in L^{\omega}(\mathcal{A}_{dbp}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Diamond\Box p$$

# *Automat für* $p$ **U** $q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{puntilq}$

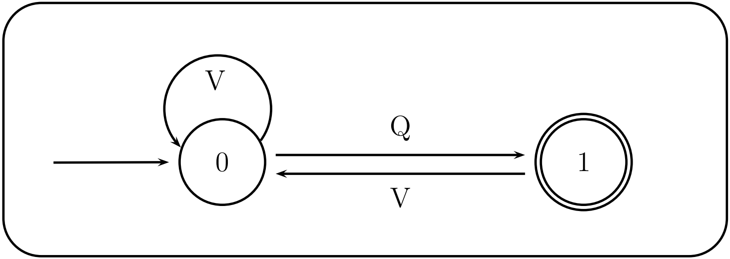



gilt

$$\xi \in L^{\omega}(\mathcal{A}_{puntilq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models p \ \mathbf{U} \ q$$

# *Automat für* $\Box\Diamond q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{infq}$




gilt

$$\xi \in L^{\omega}(\mathcal{A}_{infq}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \models \Box\Diamond q$$

# *Lemma*

*Automat für Konjunktion*

Seien

$$\mathcal{A}_1 = (S_1, V, s_1^0, \delta_1, F_1),$$
$$\mathcal{A}_2 = (S_2, V, s_2^0, \delta_2, F_2)$$

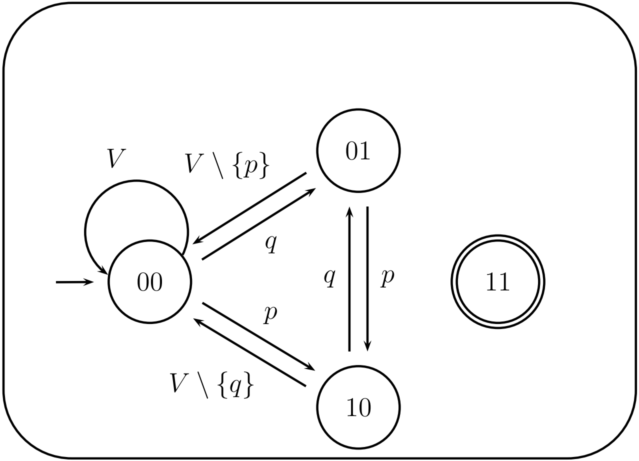
Büchi-Automaten,
$C_1, C_2$ LTL-Formeln mit

$$\mathcal{A}_1 \models C_1$$
$$\mathcal{A}_2 \models C_2$$

Dann gibt es einen Büchi-Automaten $\mathcal{C}$ mit

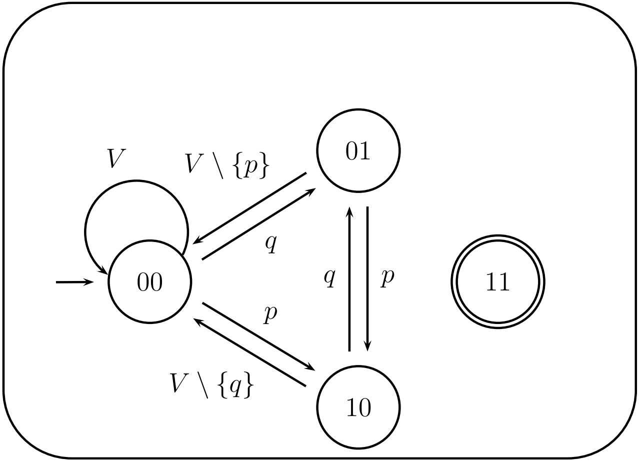
$$\mathcal{C} \models C_1 \wedge C_2$$

# *Direktes Produkt $\mathcal{A}_{infpq}$ von $\mathcal{A}_{infp}$ und $\mathcal{A}_{infq}$*



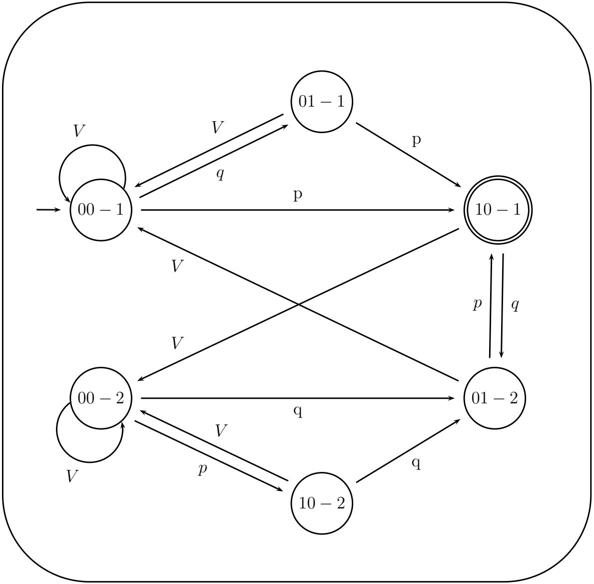

$\mathcal{A}_{\mathsf{infpq}} \models \Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$?

# *Direktes Produkt $\mathcal{A}_{infpq}$ von $\mathcal{A}_{infp}$ und $\mathcal{A}_{infq}$*




$\mathcal{A}_{\mathsf{infpq}} \models \Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$? Nein! $L^\omega = \emptyset$

# *Automat für* $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$



# Allgemeine Konstruktion für Konjunktionsautomaten

Gegeben $\mathcal{A}_i = (S_i, s_i^0, \delta_i, F_i)$
Gesucht $\mathcal{C} = (S, s^0, \delta, F)$ mit $L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2)$.

$$
\begin{array}{lcl}
S & = & S_1 \times S_2 \times \{1, 2\} \\
s^0 & = & (s_1^0, s_2^0, 1) \\
F & = & F_1 \times S_2 \times \{1\} \\
\text{falls } s_1 \in F_1 & & \\
(t_1, t_2, 2) \in \delta((s_1, s_2, 1), a) & \Leftrightarrow & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a) \\
\text{falls } s_2 \in F_2 & & \\
(t_1, t_2, 1) \in \delta((s_1, s_2, 2), a) & \Leftrightarrow & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a) \\
\text{sonst} & & \\
(t_1, t_2, i) \in \delta((s_1, s_2, i), a) & \Leftrightarrow & i \in \{1, 2\}, \\
 & & t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)
\end{array}
$$

# *Theorem*

Zu jeder LTL-Formel

$$B$$

gibt es einen Büchi-Automaten

$$\mathcal{A}_B$$

mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$$

# *Beweis*

## *Konstruktion*

Gegeben: LTL-Formel $B$

# Beweis

### Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel $B$

$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform

# Beweis

## Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel $B$

$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform

nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

# *Beweis*

## *Konstruktion*

Gegeben: LTL-Formel $B$

$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform

nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

# Beweis

## Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel $B$
$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform
nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$V = 2^P$

# Beweis

## Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel $B$
$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform
nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$V = 2^P$
$subF(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von $B$

# Beweis

## *Konstruktion*

Gegeben: LTL-Formel $B$
$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform
nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$V = 2^P$
$subF(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von $B$

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \{s \subseteq subF(B) \mid \mathbf{0} \notin s, \mathbf{1} \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \wedge C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ und } C_2 \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \vee C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ oder } C_2 \in s \ \} \\
S_0 & = & \{s \in S \mid \ B \in s\}
\end{array}
$$

# Beweis

## Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel $B$
$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform
nur: $\neg, \wedge, \vee,$ $\mathbf{U}$ , $\mathbf{V}$ , $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$V = 2^P$
$subF(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von $B$

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \{s \subseteq subF(B) \mid \mathbf{0} \not\in s, \mathbf{1} \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \wedge C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ und } C_2 \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \vee C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ oder } C_2 \in s \ \} \\
S_0 & = & \{s \in S \mid \ B \in s\}
\end{array}
$$

$E_i = A_i \ \mathbf{U} \ B_i$ für $1 \leq i \leq k$ alle Fmln der Form $A \ \mathbf{U} \ B$ in $subF(B)$.

# *Beweis*

## *Konstruktion*

Gegeben: LTL-Formel $B$
$P$ Menge der AL-Atome, $B$ in Negationsnormalform
nur: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $X$ in $B$

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$V = 2^P$
$subF(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von $B$

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \{s \subseteq subF(B) \mid \mathbf{0} \notin s, \mathbf{1} \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \wedge C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ und } C_2 \in s \\
 & & \quad \text{wenn } (C_1 \vee C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ oder } C_2 \in s \ \} \\
S_0 & = & \{s \in S \mid \ B \in s\}
\end{array}
$$

$E_i = A_i \ \mathbf{U} \ B_i$ für $1 \leq i \leq k$ alle Fmln der Form $A \ \mathbf{U} \ B$ in $subF(B)$.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k\}$ mit

$$\mathcal{F}_i = \{s \in S \mid E_i \notin s \text{ oder } E_i \in s \text{ und } B_i \in s\}$$

# *Konstruktion*

## *Die Übergangsfunktion $\delta$*

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.

# Konstruktion

## Die Übergangsfunktion $\delta$

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
2. Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.

# Konstruktion

## Die Übergangsfunktion $\delta$

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
2. Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.
3. Falls $X\ A \in s$ dann $A \in t$.

## Konstruktion

### Die Übergangsfunktion $\delta$

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
2. Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.
3. Falls $X\ A \in s$ dann $A \in t$.
4. Falls $A\ \mathbf{U}\ B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder $(A \in s$ und $A\ \mathbf{U}\ B \in t)$.

# Konstruktion

## Die Übergangsfunktion $\delta$

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
2. Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.
3. Falls $X\ A \in s$ dann $A \in t$.
4. Falls $A\ \mathbf{U}\ B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder ($A \in s$ und $A\ \mathbf{U}\ B \in t$).
5. Falls $A\ \mathbf{V}\ B \in s$, dann ($B \in s$ und $A \in s$) oder ($B \in s$ und $A\ \mathbf{V}\ B \in t$).

# *Beispiel*

$B = \Diamond\Box p$

# Beispiel

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \; \mathbf{U} \; \Box p$

# *Beispiel*

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \neg(\neg 0 \ \mathbf{U} \ \neg p)$

# Beispiel

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \mathbf{U} \Box p$
$B = 1 \mathbf{U} \neg(\neg 0 \mathbf{U} \neg p)$
$B = 1 \mathbf{U} (0 \mathbf{V} p)$

# Beispiel

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \mathbf{U} \Box p$
$B = 1 \mathbf{U} \neg(\neg 0 \mathbf{U} \neg p)$
$B = 1 \mathbf{U} (0 \mathbf{V} p)$

$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$

# *Beispiel*

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \neg(\neg 0 \ \mathbf{U} \ \neg p)$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ (0 \ \mathbf{V} \ p)$

$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$
$subFml(B) = \{B, B_0 = 0 \ \mathbf{V} \ p, p, \qquad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$

# Beispiel

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \neg(\neg 0 \ \mathbf{U} \ \neg p)$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ (0 \ \mathbf{V} \ p)$

$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$
$subFml(B) = \{B, B_0 = 0 \ \mathbf{V} \ p, p, \qquad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$
$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}\{B, p\}\{B_0, p\}\}$

## *Beispiel*

$B = \Diamond\Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \Box p$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ \neg(\neg 0 \ \mathbf{U} \ \neg p)$
$B = 1 \ \mathbf{U} \ (0 \ \mathbf{V} \ p)$

$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$
$subFml(B) = \{B, B_0 = 0 \ \mathbf{V} \ p, p, \qquad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$
$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}\{B, p\}\{B_0, p\}\}$
$E_1 = 1 \ \mathbf{U} \ B_0$ i.e. $A_1 = \mathbf{1}$, $B_1 = B_0$
$\mathcal{F} = \{F_1\}$
$F_1 = \{\{B_0\}, \{p\}, \{B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, B_0, p\}\}$

# *Korollar*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

# *Korollar*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

# *Korollar*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Nach dem im vorangegangenen Satz beschriebenen Verfahren konstruiert man die Büchi Automaten $\mathcal{A}_B$ und $\mathcal{A}_{\neg B}$. Es gilt

$$\begin{array}{lcl} B \text{ ist erfüllbar} & \Leftrightarrow & L^\omega(\mathcal{A}_B) \neq \emptyset \\ B \text{ ist allgemeingültig} & \Leftrightarrow & L^\omega(\mathcal{A}_{\neg B}) = \emptyset \end{array}$$

Für jeden Büchi Automaten $\mathcal{C}$ ist die Frage $L^\omega(\mathcal{C}) = \emptyset$? entscheidbar.

## *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

# *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten

## *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe

## *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

# *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

# *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten bescheibbaren.

## *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten bescheibbaren.
Äquivalent sind:

# *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten bescheibbaren.
Äquivalent sind:

- LTL

# *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten bescheibbaren.
Äquivalent sind:

- LTL
- Prädikatenlogik erster Stufe

## *Vergleich der Ausdrucksstärke*

Zur Beschreibung von Mengen von omega-Strukturen sind äquivalent:

- Büchi-Automaten
- Monadische Logik zweiter Stufe
- $\omega$-reguläre Mengen

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten bescheibbaren.
Äquivalent sind:

- LTL
- Prädikatenlogik erster Stufe
- stern-freie $\omega$-reguläre Mengen

## *Allgemeine Zeitstrukturen*

Gelegentlich werden allgemeinere Strukturen als omega-Struktern als Semantik für LTL-Formeln benutzt.

Eine Zeitstruktur

$$\mathcal{R} = (S, R, \xi)$$

für eine aussagenlogische Signatur $P$ besteht aus

$$\begin{array}{lcl} S & = & \text{Menge abstrakter Zeitpunkte} \\ R & = & \text{strikte Quasiordnung auf } S \\ \xi : S \rightarrow 2^P & = & \text{Interpretation der Atome in } P \end{array}$$