Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Vorlesungstermine

Do.17.01.
Fr.18.01.
Do.24.01.
letztes Übungsblatt
Praxisaufgabe zu SPIN
Fr.25.01. keine Vorlesung
Do.31.01.
Fr.01.02.
Do.07.02. keine Vorlesung
Fr.08.02 keine Vorlesung
Do.14.02 (Wiederholung)
Fr.15.02. keine Vorlesung
1.Klausur 18.02. 14:00

Büchi Automaten

Einführung

Unendliche Wörter

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V.

$$w(n)$$

bezeichnet den n-ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \ldots w(n)$ von w.

Wir nennen ein Wort $w \in V^\omega$ manchmal auch ein ω-Wort über V.

Man kann ein unendliches Wort $w \in V^\omega$ auch als eine Funktion $w : \mathbb{N} \rightarrow V$, von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Das leere Wort ε kommt nicht in V^ω vor.

Operationen

auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form

$$w_1 \ldots w_i \ldots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$

2. $$KJ = \{w_1 w_2 \quad | \quad w_1 \in K, w_2 \in J\}$$

3. $$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

   Manche Autoren benutzen $lim(K)$ anstelle von $\vec{K}$.

Büchi Automaten

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω-Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge $s_0, \ldots, s_n, \ldots$ eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w, wenn für alle $0 \leq n$ gilt

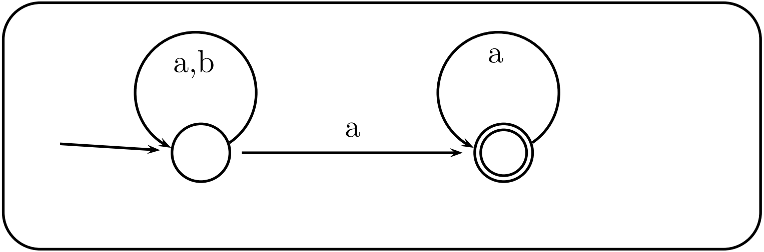
$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

Die von $\mathcal{A}$ akzeptierte ω-Sprache wird definiert durch

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen}\}$$

Der einzige Unterschied zwischen Büchi Automaten und (normalen) endlichen Automaten liegt in der Akzeptanzdefinition.

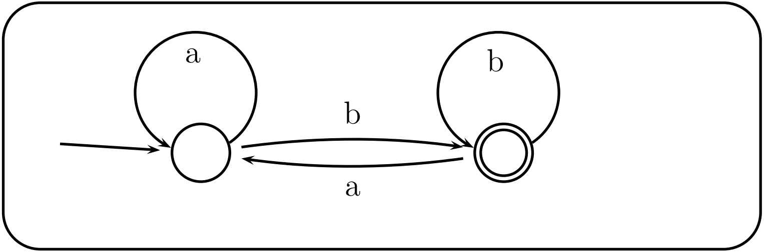
Beispiel 1



Die akzeptierte Sprache ist

$$\{a, b\}^* a^\omega$$

Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^* b^+ a)^\omega + (a^* b^+ a)^* b^\omega$$

Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Um $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand $q_f \in F$ finden, der auf einer Schleife liegt. Diese Frage kann sogar in linearer Zeit beantwortet werden, z.B. durch den Tarjan-Paige Algorithmus.

Wir nennen eine Menge L von ω-Wörtern ω-**regulär**, wenn es einen Büchi Automaten $\mathcal{A}$ gibt mit $L^\omega(\mathcal{A}) = L$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \ldots s_n \ldots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbb{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.
Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$
$\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$.
Also $w \in \vec{K}$.

Endliche und unendliche Akzeptanz

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls $\mathcal{A}$ deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbb{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechungsfolge $s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,l_n}$ für $w \downarrow (n)$.
Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$ s_n Anfangsstück von s_m.
Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge s für w, die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.
Also $w \in L^\omega(\mathcal{A})$.

Deterministische Büchi Automaten

und ihre regulären Mengen

Für eine ω-Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

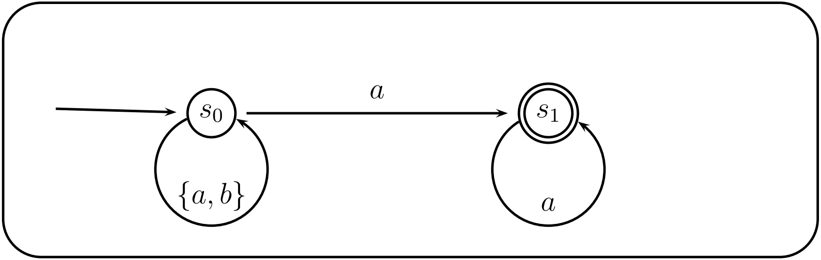
Beweis:

Folgt direkt aus der Tatsache, daß für deterministische Automaten $\mathcal{A}$

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$$

gilt (vorangeganges Lemma).

Der Beispielautomat N_{afin}



$L^\omega(N_{afin}) = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid$ in w kommt b nur endlich oft vor$\}$
und $L(N_{afin}) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ endet auf a$\}$.
Man sieht leicht, daß $L^\omega(N_{afin}) \neq Lim(L(N_{afin}))$

Deterministische Büchi Automaten

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{afin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.
Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.
Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1} b a^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1} b a^\omega \in L$.
So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots b a^{k_i} \in K$.
Wegen $L = \vec{K}$ folgt daraus auch $a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots b a^{k_i} b \ldots \in L$
im Widerspruch zur Definition von L.

Abschlußeigenschaften

Sind L_1, L_2 ω-reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω-regulär,
2. K^ω ω-regulär, falls $\varepsilon \notin K$,
3. KL_1 ω-regulär,
4. $V^\omega \setminus L_1$ ω-regulär,
5. $L_1 \cap L_2$ ω-regulär.

Beweis

Abschlossenheit unter $\cup$

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

$$\begin{array}{lcll} Q & = & Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} & \\ \delta(q, a) & = & \delta_i(q, a) & \text{falls } q \in Q_i \\ \delta(s_0, a) & = & \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) & \\ F & = & F_1 \cup F_2 & \end{array}$$

Man zeigt leicht, daß $L^\omega(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$.

Abgeschlossenheit unter Iteration

Erster Versuch

Sei $A = (Q_A, V, s_0^A, \delta_A, F_A)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit $L(A) = K$.
Automaten $B = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

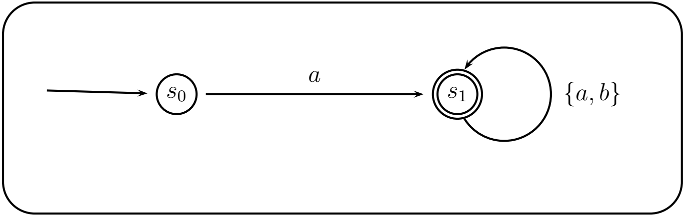
$$
\begin{array}{lcll}
Q_B & = & Q_A & \\
s_0^B & = & s_0^A & \\
\delta_B(q,x) & = & \delta_A(q,x) & \text{falls } q \notin F_A, x \in V \\
\delta_B(q,x) & = & \delta_A(q,x) \cup \delta_A(s_0^A, x) & \text{falls } q \in F_A, x \in V \\
F_B & = & F_A &
\end{array}
$$

Es gilt $L^\omega(B) \neq K^\omega$

Gegenbeispiel

zu ersten Versuch

Sei $\mathcal{A}$ der Automat



Es gilt

$$K = L(\mathcal{A}) = a\{a, b\}^*$$

Die auf der letzten Folie beschrieben Konstruktion ändert $\mathcal{A}$ nicht. Aber

$$L^\omega(\mathcal{A}) \neq K^\omega$$

z.B. $ab^\omega \in L^\omega(\mathcal{A})$ aber $ab^\omega \neq K^\omega$

Abgeschlossenheit unter Iteration

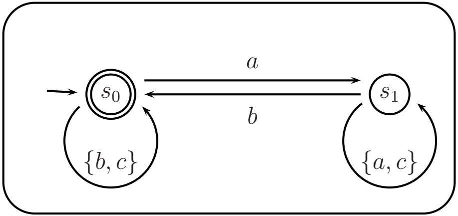
Zweiter Versuch

Der Automaten $\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

$$
\begin{array}{lcll}
Q_B & = & Q_A & \\
s_0^B & = & s_0^A & \\
\delta_B(q,a) & = & \delta_A(q,a) & \text{falls } q \in Q_B \\
\delta_B(q,\epsilon) & = & \{s_0^B\} & \text{falls } q \in F_A \\
F_B & = & \{s_0^B\} &
\end{array}
$$

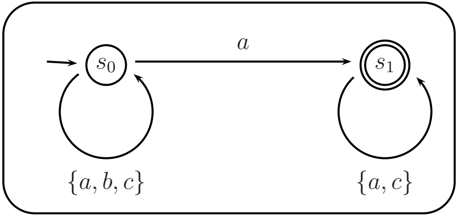
Beispiel zur Komplementbildung

N_{ba}



$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid$ nach jedem a kommt ein $b\}$

coN_{ba}



Die Abgeschlossenheit
ω-regulärer Mengen
unter Komplementbildung
muß noch bewiesen werden.

Zerlegungssatz

$L \subseteq V^\omega$ ist ω-regulär, genau dann, wenn L eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$JK^\omega$$

für reguläre Mengen $J, K \subseteq V^*$ ist, wobei $\varepsilon \notin K$.

Beweis:

Sei $A = (Q, V, s_0, \delta, F)$ ein Büchi-Automat mit $L^\omega(A) = L$.
Für $p, q \in Q$ sei

$$L_{p,q} = \{w \in V^* \mid q \in \delta(p, w)\}$$

Jedes $L_{p,q} \subseteq V^*$ ist eine reguläre Menge. Außerdem gilt

$$L = \bigcup_{p \in F} L_{s_0,p} L_{p,p}^\omega .$$

Die umgekehrte Implikation folgt aus den Abschlusseigenschaften.

Definitionen

$A = (Q, V, s_0, \delta, F)$ ein Büchi-Automat, $p, q \in Q$ und $u, w \in V^*$

1. $L_{p,q} = \{w \in V^* \mid q \in \delta(p, w)\}$
2. $L^F_{p,q} = \{w = a_0 \dots a_k \in V^* \mid$ es gibt eine Folge von
   Zuständen $q_0, \dots q_k$ mit
   $q_0 = p \quad q_k = q$ und
   $q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i)$ für alle $0 \leq i < k$ und
   $q_i \in F$ für ein $0 \leq i \leq k\}$
3. $u \equiv_A w$ gdw für alle $p, q \in Q$ gilt

$$\begin{array}{ccc} u \in L_{p,q} & \Leftrightarrow & w \in L_{p,q} \\ u \in L^F_{p,q} & \Leftrightarrow & w \in L^F_{p,q} \end{array}$$

Offensichtliche Konsequenzen

Offensichtlich gilt stets

$$L^F_{p,q} \subseteq L_{p,q}$$

falls $p \in F$ oder $q \in F$ auch

$$L^F_{p,q} = L_{p,q}.$$

$\equiv_A$ ist eine Äquivalenzrelation ist.

Eigenschaften von $\equiv_A$

1. für alle $p, q \in Q$ sind $L^F_{p,q}$ und $L_{p,q}$ reguläre Mengen,
2. jede Äquivalenzklasse von $\equiv_A$ ist von der Form

$$\bigcap_{(p,q)\in P} L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin P} \sim L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\in R} L^F_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin R} \sim L^F_{p,q}$$

   für geeignete Teilmengen $P, R \subseteq Q \times Q$.
3. $\equiv_A$ besitzt endlich viele Äquivalenzklassen,
4. jede Äquivalenzklasse von $\equiv_A$ ist eine reguläre Menge,
5. sind U_1, U_2 Äquivalenzklassen von $\equiv_A$, dann folgt aus $U_1 U_2^\omega \cap L^\omega(A) \neq \emptyset$ schon $U_1 U_2^\omega \subseteq L^\omega(A)$

Beweis

Teil 1

Für alle $p, q \in Q$ sind $L^F_{p,q}$ und $L_{p,q}$ reguläre Mengen.

Für $L_{p,q}$ wurde das schon im Beweis des Zerlegungssatzes benutzt.

Wegen

$$L^F_{p,q} = \bigcup_{f \in F} L_{p,f} L_{f,q}$$

folgt auch die Regularität von $L^F_{p,q}$.

Beweis

Teil 2

Jede Äquivalenzklasse von $\equiv_A$ ist von der Form

$$\bigcap_{(p,q)\in P} L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin P} \sim L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\in R} L^F_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin R} \sim L^F_{p,q}$$

für geeignete Teilmengen $P, R \subseteq Q \times Q$.

Für die Äquivalenzklasse $M(u)$ von $u \in V^\omega$ gilt

$$\begin{array}{lll} M(u) \subseteq L_{p,q} & \text{falls} & u \in L_{p,q} \\ M(u) \subseteq \sim L_{p,q} & \text{falls} & u \notin L_{p,q} \\ M(u) \subseteq L^F_{p,q} & \text{falls} & u \in L^F_{p,q} \\ M(u) \subseteq \sim L^F_{p,q} & \text{falls} & u \notin L^F_{p,q} \end{array}$$

Beweis

Teil 2, Fortsetzung

$$M(u) \subseteq$$
$$\bigcap_{(p,q)\in P} L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin P} \sim L_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\in R} L^F_{p,q} \cap \bigcap_{(p,q)\notin R} \sim L^F_{p,q}$$

für

$$\begin{array}{rcl} P & = & \{(p,q) \in Q^2 \mid u \in L_{p,q}\} \\ R & = & \{(p,q) \in Q^2 \mid u \in L^F_{p,q}\} \end{array}$$

Gleichheit folgt aus der Definition von $\equiv_A$.

Beweis
Teil 3

$\equiv_A$ besitzt endlich viele Äquivalenzklassen,

Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten die Mengen

$$P, Q \subseteq Q^2$$

in der Darstellung nach Teil 2 zu wählen.

Beweis

Teil 4

Jede Äquivalenzklasse von $\equiv_A$ ist eine reguläre Menge.

folgt aus 1, 2 und den Abschlußeigenschaften regulärer Mengen.

Beweis

Teil 5

Sei $w \in U_1 U_2^\omega \cap L^\omega(A)$ gegeben und u ein weiteres Wort aus $U_1 U_2^\omega$. Es ist $u \in L^\omega(A)$ zu zeigen.
Wegen $w \in U_1 U_2^\omega$ können wir w wie folgt zerlegen:

$$w = w_1 w_2 \ldots w_n \ldots$$

wobei $w_1 \in U_1$ und $w_i \in U_2$ für alle $i > 1$.
Wegen $w \in L^\omega(A)$ gibt es eine Berechnungsfolge σ für w in A in der unendlich viele Zustände aus F auftreten.
Wir interessieren uns für bestimmt Stützpunkte in der Folge σ; mit q_n bezeichen wir den Zustand in σ, der nach Einlesen des Teilwortes w_n und vor Beginn des Einlesens von w_{n+1} eingenommen wird.
Zusätzlich sei $q_0 = s_0$ der Anfangszustand.
Sei schließlich $u \in U_1 U_2^\omega$, genauer

$$u = u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

mit $u_1 \in U_1$ und $u_i \in U_2$ für alle $i > 1$.

Beweis zu Teil 5

Fortsetzung

Da U_1 und U_2 nach Voraussetzung $\equiv_A$ Äquivalenzklassen sind gilt für alle i

$$w_i \equiv_A u_i$$

Wir konstruieren eine Berechnungsfolge ρ für u, welche die Zustände q_n in derselben Reihenfolge wie σ durchläuft.
Nach Definition der q_i gilt auf jeden Fall $w_n \in L_{q_n,q_{n+1}}$.
Wegen $w_n \equiv_A u_n$ gilt dann auch $u_n \in L_{q_n,q_{n+1}}$. Man kann also den Weg von q_n nach q_{n+1} in ρ interpolieren. Kommt in σ ein Finalzustand zwischen q_n und q_{n+1} vor, so gilt $w_n \in L^F_{q_n,q_{n+1}}$ und wegen $w_n \equiv_A u_n$ auch $u_n \in L^F_{q_n,q_{n-1}}$. Das Teilstück von ρ zwischen q_n und q_{n+1} kann demnach auch so gewählt werden, daß darin ein Finalzustand vorkommt. Das zeigt, daß ρ eine akzeptierende Berechnungsfolge für u ist und damit $u \in L^\omega(A)$.

Satz von Ramsey

Sei $P_1, \ldots, P_k$ eine endliche Partition aller zweielementigen Teilmenge der Menge $\boldsymbol{N}$ der natürlicher Zahlen.
Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $T \subseteq \boldsymbol{N}$ und ein i mit $1 \leq i \leq k$, so daß alle zweielementigen Teilmengen von Elementen aus T in P_i liegen.
In Formeln:
aus $P_1 \uplus \ldots \uplus P_k = \boldsymbol{N}^{[2]}$ folgt die Existenz einer unendlichen Menge $T \subseteq \boldsymbol{N}$, so daß $T^{[2]} \subseteq P_i$ für ein i.
T heißt eine homogene Menge für $P_1, \ldots, P_k$

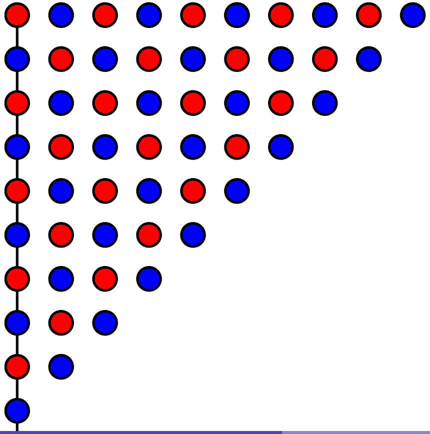
Beweis im Buch von Monk oder dem von Felscher oder in der Orginalarbeit von Ramsey (1929).

Satz von Ramsey

Visuelles Beispiel

Wir identifizieren $\mathbb{N}^{[2]}$ mit $\{(n,m) \mid n < m\}$

$P_1 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^{[2]} \mid m - n \text{ ist ungerade}\}$
$P_2 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^{[2]} \mid m - n \text{ ist gerade}\}$



Eine homogene Menge ist z.B.

$T = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lemma

Zu jedem $w \in V^\omega$ gibt es$\equiv_A$-Äquivalenzklassen U und W mit $w \in UW^\omega$.

Beweis:

Seien $U_1, \ldots, U_n$ alle Äquivalenzklassen von $\equiv_A$ und bezeichne für $i < j$ $w_{i,j}$ das endliche Teilwort $w(i) \ldots w(j-1)$ von w.

Dann wird durch

$$P_r = \{\{i,j\} \in \mathbb{N}^{[2]} \mid [w_{i,j}]_{\equiv_A} = U_r\}$$

eine Partition von $\mathbb{N}^{[2]}$ definiert.

Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine unendliche Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ und ein k mit $T^{[2]} \subseteq P_k$.

Sei i_0 das kleinste Element in T und $U = [w \downarrow (i_0)]_{\equiv_A}$, dann gilt offensichtlich

$$w \in UU_k^\omega$$

Abgeschlossenheit unter Komplementen

Ist $L \subseteq V^\omega$ eine ω-reguläre Menge, dann auch $V^\omega \setminus L$

Beweis

Sei A ein Büchi Automat mit $L^\omega(A) = L$.

$$V^\omega \setminus L = \bigcup_{(U_1,U_2)\in\mathcal{R}} U_1 U_2^\omega$$

dabei gilt $(U_1, U_2) \in \mathcal{R}$ genau dann, wenn $U_1 U_2^\omega \cap L = \emptyset$.

U_i sind $\equiv_A$ Äquivalenzklassen.

Varianten von Büchi Automaten

Menge von Anfangszuständen

Zu jedem Büchi Automaten $\mathcal{C} = (S, V, S_0, \delta, F)$ mit einer Menge von Anfangszuständen gibt es einen Büchi Automaten $\mathcal{A}$ mit einem einzigen Anfangszustand und

$$L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A})$$

Beweis:

Sei $S_i = \{s_1, \ldots, s_k\}$.
Wir setzen $\mathcal{C}_i = (S, V, s_i, \delta, F)$.
Offensichtlich gilt $L^\omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^{k} L^\omega(\mathcal{C}_i)$.
Die Existenz von $\mathcal{A}$ folgt jetzt aus Abgeschlossenheit ω-regulärer Mengen unter Vereinigung.

Erweiterte Büchi Automaten

Ein ω-Wort w wird von dem erweiterten Büchi Automat

$$\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F_1, \ldots, F_n)$$

akzeptiert, wenn es eine Berechungsfolge s für w gibt, die für jedes j, $1 \leq j \leq n$ unendlich viele Zustände aus F_j enthält.
Also

$$L^\omega(A) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge } s \text{ für } w, \text{ so daß für jedes } j, 1 \leq j \leq n, \text{ die Menge } \{i \mid s_i \in F_j\} \text{ unendlich ist.}\}$$

Erweiterte Büchi Automaten

Reduktion

Zu jedem erweiterten Büchi Automaten $\mathcal{A}_e$ gibt es einen einfachen Büchi Automaten $\mathcal{A}$ mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_e) = L^\omega(\mathcal{A})$$

Müller Automaten

Definition

Ein Müller Automat $\mathcal{M} = (S, V, s_0, \delta, \mathcal{F})$ ist ein endlicher Automat $\mathcal{M} = (S, V, s_0, \delta)$ ohne Angabe von Endzuständen, aber stattdessen mit einer Menge $\mathcal{F}$ nicht leerer Endzustandsmengen, d.h. für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $F \subseteq S$ und $F \neq \emptyset$.
Ist $\sigma = s_1, \ldots, s_n, \ldots$ eine Zustandsfolge, so bezeichnet $In(\sigma)$ die Menge der Zustände, die unendlich oft in σ vorkommen, also

$$In(\sigma) = \{s \in S \mid \text{es gibt unendlich viele } n \text{ mit } s_n = s\}$$

Die von einem Müller Automat $\mathcal{M} = (S, V, s_0, \delta, \mathcal{F})$ akzeptierte ω-Sprache wird definiert durch:

$$L^\omega(\mathcal{M}) = \{w \in V^\omega \mid In(\sigma) \in \mathcal{F} \text{ für eine Berechnungsfolge } \sigma \text{ für } w\}$$

Müller Automaten

Die Klasse der von nichtdeterministischen Büchi Automaten akzeptierten ω-Sprachen stimmt überein mit der von nichtdeterministischen Müller Automaten akzeptierten ω-Sprachen.