Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Vorlesungstermine

Bisher	2.Änderung
Do.17.01.	Do.17.01.
Fr.18.01.	Fr.18.01.
Do.24.01.	Do.24.01.
	letztes Übungsblatt
	Praxisaufgabe zu SPIN
Fr.25.01.	Fr.25.01. keine Vorlesung
Do.31.01.	Do.31.01.
Fr.01.02.	Fr.01.02.
Do.07.02. keine Vorlesung	keine Vorlesung
Fr.08.02. keine Vorlesung	keine Vorlesung
Do.14.02. keine Vorlesung	Do.14.02 (Wiederholung)
Fr.15.02.	Fr.15.02. keine Vorlesung
1.Klausur 18.02. 14:00	1.Klausur 18.02. 14:00

Endliche Automaten

Wiederholung

Deterministische Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen

Deterministische Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)

Deterministische Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$

Deterministische Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \to S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$

Deterministische Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \to S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Akzeptierte Sprachen

Die Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$ wird fortgesetzt zu $\delta : S \times VT^* \rightarrow S$:

$$\begin{array}{lcl} \delta(s, \varepsilon) & = & s \\ \delta(s, aw_1) & = & \delta(s', w_1) \text{ wobei } \delta(s, a) = s' \end{array}$$

Jeder endliche Automat EA akzeptiert eine Menge von Wörtern $L(EA)$.

$$L(EA) = \{w \in VT^* \mid \delta(s_0, w) \in S_1\}$$

Vollständige Endliche Automaten

Variante

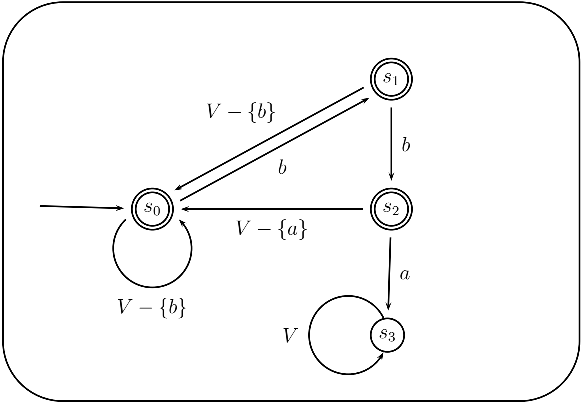
Gelegentlich wird in Beispielen die Übergangsfunktion δ nicht für alle Paare (s, a) definiert.

Wird während der Abarbeitung eines Wortes w eine Situation (s, a) erreicht, für die $\delta(s, a)$ nicht definiert ist, so gilt w als nicht akzeptiert.

Ein endlicher Automat, so daß $\delta(s, a)$ für alle $s \in S$ und $a \in VT$ definiert ist, heißt ein vollständiger endlicher Automat.

Der Beispielautomat N_{bba}

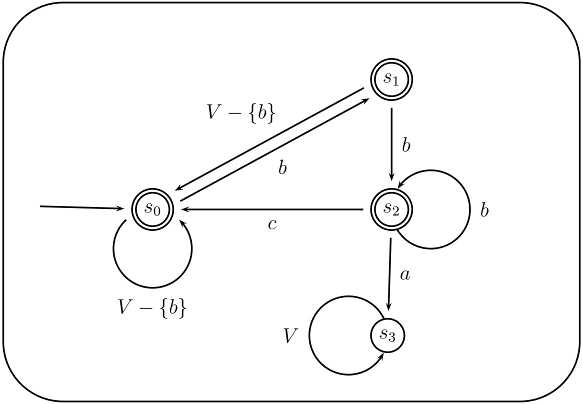
Inkorrekte Version



$V = \{a, b, c\} \qquad S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$

$L(N_{bba}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid bba \text{ ist kein Teilwort von } w\}$

Der Beispielautomat N_{bba}



$V = \{a, b, c\} \quad S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$

$L(N_{bba}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid bba$ ist kein Teilwort von $w\}$

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministisch Akzeptierte Sprachen

Die Fortsetzung von $\delta : S \times V \to Pot(S)$ zu $\delta : S \times V^* \to Pot(S)$ wird jetzt wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl} \delta(s,\varepsilon) & = & \{s\} \\ \delta(s,aw_1) & = & \{s' : \text{ es gibt } s_1 \in S \text{ mit } s_1 \in \delta(s,a) \\ & & \quad \text{und } s' \in \delta(s_1,w_1)\} \end{array}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten NEA akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird jetzt durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* : \delta(s_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Spontanen Übergänge

Ein endlicher Automat mit spontanten Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,

Spontanen Übergänge

Ein endlicher Automat mit spontanten Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,

Spontanen Übergänge

Ein endlicher Automat mit spontanten Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,

Spontanen Übergänge

Ein endlicher Automat mit spontanten Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Spontanen Übergänge

Ein endlicher Automat mit spontanten Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Hilfsfunktion

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon - cl : Pot(S) \rightarrow Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-$cl(I)$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$

Hilfsfunktion

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon - cl : Pot(S) \to Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-$cl(I)$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Hilfsfunktion

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon - cl : Pot(S) \to Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-$cl(I)$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Hilfsfunktion

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon - cl : Pot(S) \rightarrow Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-$cl(I)$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung ε-*cl* soll an ε-*closure* erinnern.

Akzeptierte Sprache

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$
\begin{array}{lcl}
\bar{\delta}(s, \varepsilon) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s\}) \\
\bar{\delta}(s, aw_1) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s' : \text{ es gibt } s_1 \in (\delta(s, a) \cup \delta(s, \varepsilon)) \text{ so, daß} \\
 & & \qquad\qquad s' \in \bar{\delta}(s_1, w_1)\})
\end{array}
$$

Akzeptierte Sprache

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$\begin{array}{lcl} \bar{\delta}(s,\varepsilon) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s\}) \\ \bar{\delta}(s,aw_1) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s' : \text{ es gibt } s_1 \in (\delta(s,a) \cup \delta(s,\varepsilon)) \text{ so, daß} \\ & & \qquad\qquad s' \in \bar{\delta}(s_1,w_1)\}) \end{array}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten NEA akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird wieder durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* : \bar{\delta}(s_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Satz von Myhill und Büchi

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Satz von Myhill und Büchi

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Dabei kann A spontane Übergänge enthalten und muß auch nicht vollständig sein.

Operationen mit Wortmengen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,

Operationen mit Wortmengen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$

Operationen mit Wortmengen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung

Operationen mit Wortmengen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
4. $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt

Operationen mit Wortmengen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
4. $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt
5. $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Reguläre Ausdrücke

1. $\emptyset \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
4. für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
4. für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
5. für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,
4. $S((t)^*) = S(t)^*$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,
4. $S((t)^*) = S(t)^*$,
5. $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1 \cup S(t_2)$.

Satz

1. Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit
$$S(t) = L(A).$$

Satz

1. Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit
$$S(t) = L(A).$$

Satz

1. Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit
$$S(t) = L(A).$$

Wir benutzen im folgenden stillschweigend die Assoziativität der Konkatenation und von $+$ um in regulären Ausdrücken Klammern einzusparen, also $(a + b + c)$ anstelle von $((a + b) + c)$.