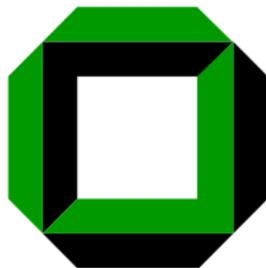


# *Formale Systeme*

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008



## Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

### Logische Zeichen:

Wie in der PL1:  $(, ), \dot{=} , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \forall , \exists$ .

*Variable:*

$Var = Ivar \cup Mvar$  (disjunkt)

*Ivar:* Individuenvariable  $v_0, v_1, \dots$

Notation:  $x, y, z, \dots$

*Mvar:* Mengenvariable oder  
einstellige Prädikatvariable  $M_0, M_1, \dots$

Notation:  $X, Y, Z, \dots$

**Signatur**  $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$  wie in PL1

**Terme**  $Term_\Sigma$  wie in PL1



## Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

### atomare Formeln:

$s \doteq t$  für Terme  $s, t$

$p(t_1, \dots, t_n)$  für  $p \in P_\Sigma$ ,  $\alpha_\Sigma(p) = n$ ,  $t_i \in \text{Term}_\Sigma$

$X(t)$  für Mengenvariable  $X$  und Terme  $t$

Formeln  $\text{For}_\Sigma^2$  enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1, 0**
- mit  $A, B \in \text{For}_\Sigma^2$ ,  $x \in \text{Ivar}$ ,  $X \in \text{Mvar}$   
auch:  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$ ,  
 $\forall xA$ ,  $\exists xA$ ,  $\forall XA$ ,  $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend der PL1 gebildet.



## Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation  $\mathcal{D} = (D, I)$  sind Belegungen

$$\beta: Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma: Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ( $P(D)$ : Potenzmenge von  $D$ ).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{aligned} val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W &\Leftrightarrow val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\ val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall XA) = W &\Leftrightarrow \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\ val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists XA) = W &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \end{aligned}$$



## Modellbegriff

$(D, I)$  heißt *Modell* von  $A$ :  $\Leftrightarrow \text{val}_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$  für alle  $\beta, \gamma$ .

$(D, I)$  ist Modell einer Formelmeng  $M$ :  $\Leftrightarrow$

$(D, I)$  ist Modell jeder Formel in  $M$ .

$M \models A$ :  $\Leftrightarrow$  Jedes Modell von  $M$  ist Modell von  $A$

$A$  *allgemeingültig*:  $\Leftrightarrow \models A$

$A$  *erfüllbar*:  $\Leftrightarrow \neg A$  ist nicht allgemeingültig.



## Beispiele für PL2 Formeln

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$   
Charakterisiert die Gleichheit.
- $\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(S(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$   
Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.



# Kompaktheit

## Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- Es gibt eine Formelmenge  $S$ , so daß jede endliche Teilmenge von  $S$  ein Modell hat  $S$  selbst aber nicht.

## Beweis

Vokabular  $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{ \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y)) \} \\ \cup \{ c \neq s^n(0) \mid n \geq 0 \}$$

Aus  $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall yX(y))$  folgt  $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$ .

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen  $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$  lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.



# Axiomatisierbarkeit

## Theorem

Für die Prädikatenlogik 2. Stufe kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.

## Beweis

Der Begriff der Ableitbarkeit aus einem Kalkül  $K$  ist stets kompakt, d. h.

$$S \vdash_K A$$

folgt stets

$$E \vdash_K A$$

für eine endliche Teilmenge  $E \subseteq S$ . Die Existenz eines korrekten und vollständigen Kalküls stünde also im Widerspruch zu dem Gegenbeispiel zur Kompaktheit von PL2.



## Endlichkeit

Mit Quantoren über 2-stellige Relationen kann man auch die Endlichkeit des Grundbereichs durch eine Formel ohne nicht-logische Zeichen ausdrücken.

$$\begin{aligned} Fin &:= \\ \forall U & ((\forall x \exists y U(x, y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (U(x, y) \wedge U(x, z) \rightarrow y \doteq z) \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z (U(x, z) \wedge U(y, z) \rightarrow x \doteq y)) \\ & \rightarrow \forall y \exists x U(x, y)) \end{aligned}$$

$$(D, I) \models Fin \Leftrightarrow D \text{ ist endlich}$$



# Endlichkeit

Beweisidee

$(D, I)$  endlich

$\Leftrightarrow$  Jede injektive Funktion  $F : D \rightarrow D$  ist auch surjektiv

$\Leftrightarrow$  Für jede Relation  $R \subseteq D \times D$  gilt:

Wenn  $R$  der Graph einer injektiven Funktion ist,  
dann ist diese auch surjektiv.

