Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1
Terme Term_Σ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall xA$, $\exists xA, \forall XA, \exists XA$

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathsf{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall x A$, $\exists x A$, $\forall X A$, $\exists X A$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend der PL1 gebildet.

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad \mathit{Ivar} \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad \mathit{Mvar} \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad \mathit{Ivar} \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad \mathit{Mvar} \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \quad \Leftrightarrow \quad val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X)$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{array}{lcl} val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\ val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \end{array}$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{array}{lcl} val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\ val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\ val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \end{array}$$

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von $A :\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M $:\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von $A :\quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge $M :\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A :\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von $A : \quad \Leftrightarrow \quad val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge $M :\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A :\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* $:\Leftrightarrow \ \models A$

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A *erfüllbar* :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Beispiele für PL2 Formeln

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit.

Beispiele für PL2 Formeln

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit.
- $\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \rightarrow X(S(y)))) \rightarrow \forall y X(y))$
  Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

Kompaktheit

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Kompaktheit

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \\ & & \cup \{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

Kompaktheit

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \\ & & \cup \{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Kompaktheit

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \\ & & \cup\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.

Axiomatisierbarkeit

Theorem

Für die Prädikatenlogik 2. Stufe kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.

Beweis

Der Begriff der Ableitbarkeit aus einem Kalkül K ist stets kompakt, d. h.

$$S \vdash_K A$$

folgt stets

$$E \vdash_K A$$

für eine endliche Teilmenge $E \subseteq S$. Die Existenz eines korrekten und vollständigen Kalküls stünde also im Widerspruch zu dem Gegenbeispiel zur Kompaktheit von PL2.

Endlichkeit

Mit Quantoren über 2-stellige Relationen kann man auch die Endlichkeit des Grundbereichs durch eine Formel ohne nicht-logische Zeichen ausdrücken.

$$
\begin{array}{ll}
Fin & := \\
\forall U & ((\forall x \exists y U(x,y) \land \\
 & \forall x \forall y \forall z (U(x,y) \land U(x,z) \rightarrow y \doteq z) \\
 & \land \forall x \forall y \forall z (U(x,z) \land U(y,z) \rightarrow x \doteq y)) \\
 & \rightarrow \forall y \exists x U(x,y))
\end{array}
$$

$$(D, I) \models Fin \Leftrightarrow D \text{ ist endlich}$$

Endlichkeit

Beweisidee

(D, I) endlich

$\Leftrightarrow$ Jede injektive Funktion $F : D \rightarrow D$ ist auch surjektiv

$\Leftrightarrow$ Für jede Relation $R \subseteq D \times D$ gilt:
Wenn R der Graph einer injektiven Funktion ist,
dann ist diese auch surjektiv.