Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Termersetzungssysteme

Einstieg

Termersetzungssysteme sind eine sehr erfolgreiche Methode in der Gleichungslogik.

Aus einer Menge symmetrischer Gleichungen E wird ein gerichtetes *Termersetzungssystem*.

Die den Termersetzungssystemen zugrunde liegende Idee einer eindeutigen Normalform und die schrittweise Normalisierung eines symbolischen Ausdrucks ist so elementar, daß sie in vielen Zusammenhängen in unterschiedlichen Ausprägungen eine Rolle spielt.

Der übergreifende Begriff sind die *Reduktionssysteme*.

Reduktionssysteme

Ein **Reduktionssystem** $(D, \succ)$ besteht aus einer nichtleeren Menge D und einer beliebigen, binären Relation $\succ$ auf D.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

$\rightarrow$	die reflexive, transitive Hülle von $\succ$
$\stackrel{+}{\rightarrow}$	die transitive Hülle von $\succ$
$\leftrightarrow$	die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch**.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch**.
5. Ein Element $s \in D$ heißt **irreduzibel** (oder eine **Normalform**) in $(D, \succ)$, wenn kein $t \in D$ existiert mit $s \succ t$.

Einschränkende Eigenschaften

von Reduktionssystemen

1. Ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ ein $t \in D$ existiert mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
2. $(D, \succ)$ heißt **lokal konfluent**, wenn für alle $s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1$, $s \succ s_2$ ein $t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ existiert.
3. $(D, \succ)$ heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge $s_0 \succ s_1 \ldots \succ s_i \succ \ldots$ gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch**.
5. Ein Element $s \in D$ heißt **irreduzibel** (oder eine **Normalform**) in $(D, \succ)$, wenn kein $t \in D$ existiert mit $s \succ t$.
6. Sei $s \in D$. Ein Element $s_0 \in D$ heißt eine **Normalform für s** in $(D, \succ)$, wenn s_0 irreduzibel ist und $s \rightarrow s_0$ gilt.

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ *ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:*

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*
2. *Für $s, t \in D$ gilt*

$$s \leftrightarrow t \text{ gdw } irr(s) = irr(t)$$

Kanonische Reduktionssysteme

Theorem

Sei $(D, \succ)$ ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. *Zu jedem $s \in D$ gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit $irr(s)$.*
2. *Für $s, t \in D$ gilt*
$$s \leftrightarrow t \text{ gdw } irr(s) = irr(t)$$
3. *$(D, \succ)$ sei berechenbar im folgenden Sinne: Es gibt einen Algorithmus, der zu jedem $t \in D$ ein t' mit $t \succ t'$ liefert, wenn ein solches existiert, und andernfalls ausgibt „t ist irreduzibel“, Dann ist die Relation $\leftrightarrow$ entscheidbar.*

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \longrightarrow s_1$ und $s \longrightarrow s_2$.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \rightarrow s_1$ und $s \rightarrow s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \rightarrow s_1$ und $s \rightarrow s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \rightarrow s_1$ und $s \rightarrow s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \rightarrow s_1$ und $s \rightarrow s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,
Setze $s_0 = s$ und wählen ein s_{i+1} mit $s_i \succ s_{i+1}$, solange s_i nicht irreduzibel ist.

Beweis

Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für $s \in D$ zwei Normalformen s_1, s_2.
D.h. es gilt $s \rightarrow s_1$ und $s \rightarrow s_2$.
Wegen der Konfluenz von $(D, \succ)$ gibt es $t \in D$ mit
$s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$.
Das widerspricht der Irreduzibilität von s_1, s_2.
Existenz einer Normalform für $s \in D$,
Setze $s_0 = s$ und wählen ein s_{i+1} mit $s_i \succ s_{i+1}$, solange s_i nicht irreduzibel ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, wird nach endlich vielen Schritten ein irreduzibles s_i erreicht.

Beweis

$s \leftrightarrow t \ \mathit{gdw} \ irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.

Beweis

$s \leftrightarrow t$ *gdw* $irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.
Im Fall $s_0 \succ s_1$ gilt offensichtlich $irr(s_0) = irr(s_1)$, und wir sind fertig.

Beweis

$s \leftrightarrow t \; gdw \; irr(s) = irr(t)$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.
Gelte jetzt $s \leftrightarrow t$.
Nach Definition von $\leftrightarrow$ gibt es eine Folge $s = s_0, s_1, \ldots, s_n = t$, so daß für alle $0 \leq i < n$ entweder $s_i \succ s_{i+1}$ oder $s_{i+1} \succ s_i$ gilt.
Der Nachweis von $irr(s) = irr(t)$ geschieht durch Induktion über n.
Der Induktionsanfang $n = 0$, d.h. $s = t$ ist trivial.
Sei also die Behauptung für Folgen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Also gilt $irr(s_1) = irr(t)$.
Im Fall $s_0 \succ s_1$ gilt offensichtlich $irr(s_0) = irr(s_1)$, und wir sind fertig.
Falls $s_1 \succ s_0$ gilt, folgt aus der Konfluenz, daß ebenfalls $irr(s_0) = irr(s_1)$ gelten muß.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \ldots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel“ mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel“ mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.
Entsprechend erhält man $irr(t)$ aus t.

Beweis

Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem s, t wird wie folgt entschieden, ob $s \leftrightarrow t$.
Beginnend mit $s_0 := s$, liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente s_i mit $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \ldots$, bis hierbei ein irreduzibles s_m erreicht ist.
Da $(D, \succ)$ noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „s_m ist irreduzibel" mitgeteilt, ferner gilt $s_m = irr(s)$.
Entsprechend erhält man $irr(t)$ aus t.
Nach (2) ist $s \leftrightarrow t$ genau dann, wenn $irr(s) = irr(t)$.

Noethersche Induktion

Theorem

Für ein noethersches Reduktionssystem $(D, \succ)$ gilt das folgende Beweisprinzip der Noetherschen Induktion:
Es sei $X \subseteq D$, so daß für alle $a \in D$ gilt

$$\{b | a \succ b\} \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist $X = D$.

Noethersche Induktion

Proof.

Angenommen es gibt $a_0 \in D\backslash X$. Nach Annahme über X gilt
$\{b|a_0 \succ b\} \not\subseteq X$.
Es gibt also ein a_1 mit

$$a_0 \succ a_1, a_1 \notin X$$

Nach Annahme über X gilt wieder $\{b|a_1 \succ b\} \not\subseteq X$ und es gibt ein a_2 mit

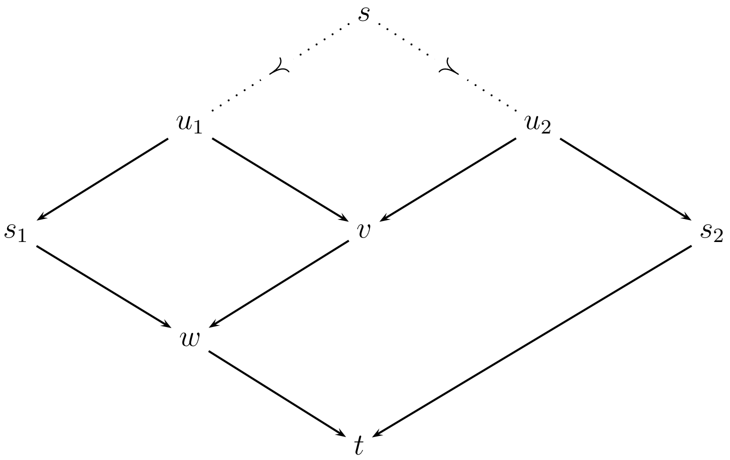
$$a_0 \succ a_1 \succ a_2, a_2 \notin X$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man eine unendliche Folge $(a_i)_{i\in \mathbf{N}}$ mit $a_i \succ a_{i+1}$ für alle i. Das ist ein Widerspruch, denn $(D, \succ)$ war als noethersch vorausgesetzt. □

Von lokaler zu uneingeschränkter Konfluenz

Theorem

Wenn $(D, \succ)$ ein noethersches und lokal konfluentes Reduktionssystem ist, dann ist $(D, \succ)$ konfluent, d. h. kanonisch.



Beweis

Wir verwenden noethersche Induktion bezüglich der Menge

$$\begin{aligned} \mathit{Confl} \quad := \quad & \{s \mid \text{für alle } s_1, s_2 \\ & \text{mit } s \to s_1, s \to s_2 \\ & \text{existiert ein } t \text{ mit } s_1 \to t, s_2 \to t\} \end{aligned}$$

Dazu müssen wir also zeigen, daß für alle s gilt:

$$\{s' \mid s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

Es seien s, s_1, s_2 gegeben mit $s \to s_1$, $s \to s_2$.

Im Falle $s = s_1$ oder $s = s_2$ ist man fertig. (Etwa: $s_1 = s \to s_2$).

Sei also $s \neq s_1$, $s \neq s_2$.

Beweis(Forts.)

Nachweis von

$$\{s' | s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

im Falle $s \rightarrow s_1$, $s \rightarrow s_2$ mit $s \neq s_1$, $s \neq s_2$.

Es existieren u_1, u_2 mit $s \succ u_1 \rightarrow s_1$ und $s \succ u_2 \rightarrow s_2$.

Wegen der lokalen Konfluenz von $(D, \succ)$ existiert ein v mit $u_1 \rightarrow v, u_2 \rightarrow v$.

Nach Voraussetzung („Induktionsannahme“) liegt u_1 in Confl. Also gibt es ein w mit $s_1 \rightarrow w$ und $v \rightarrow w$.

Entsprechend schließen wir aus der Induktionsannahme $u_2 \in \text{Confl}$, daß ein Term t existiert mit $s_2 \rightarrow t$ und $w \rightarrow t$.

Wir haben $s_1 \rightarrow t$ und $s_2 \rightarrow t$ und somit $s \in \text{Confl}$, was zu beweisen war.

Beispiele für Reduktionssysteme

Polynomalgebra

- Ein **Potenzprodukt** in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über einem Körper K ist ein Ausdruck der Form

$$X_1^{e_1} * \ldots * X_n^{e_n}$$

mit natürlichen Zahlen e_j,

Beispiele für Reduktionssysteme

Polynomalgebra

- Ein **Potenzprodukt** in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über einem Körper K ist ein Ausdruck der Form

  $$X_1^{e_1} * \ldots * X_n^{e_n}$$

  mit natürlichen Zahlen e_j,
- Ein **Monom** in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über K ist ein Ausdruck der Form

  $$c * pp,$$

  wobei $c \neq 0$ ein Element aus K ist und pp ein Potenzprodukt.

Beispiele für Reduktionssysteme

Polynomalgebra (Forts.)

- Ein **Polynom** in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über K ist ein Ausdruck der Form

$$m_1 + \ldots + m_k$$

mit Monomen m_i.

Beispiele für Reduktionssysteme

Polynomalgebra (Forts.)

- Ein **Polynom** in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über K ist ein Ausdruck der Form

$$m_1 + \ldots + m_k$$

mit Monomen m_i.

- Die Menge aller Polynome über K bildet mit den naheliegenden Produkt- und Summendefinition den Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Zulässige Ordnungen

Eine Ordnungsrelation $\prec$ auf der Menge aller Monome heißt **zulässig**, wenn für beliebige Monome m, m_1, m_2 gilt:

1. aus $m_1 \prec m_2$ folgt $m_1 * m \prec m_2 * m$ und
2. $1 \preceq m$

Zulässige Ordnungen

Eine Ordnungsrelation $\prec$ auf der Menge aller Monome heißt **zulässig**, wenn für beliebige Monome m, m_1, m_2 gilt:

1. aus $m_1 \prec m_2$ folgt $m_1 * m \prec m_2 * m$ und
2. $1 \preceq m$

Die lexikographische Ordnung der Monome ist ein typisches Beispiel einer zulässigen Ordnungsrelation.

Die Polynomreduktion

Sei $B \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$.

Die Reduktionsrelation $\succ_B$ auf $K[X_1, \ldots, X_n]$, die Polynomreduktion für B, wird wie folgt definiert.

$f \succ_B g$ gilt genau dann, wenn

- das größte Monom in f ist $m = c_1 * pp_1$ für $c \in K$ und ein Potenzprodukt pp_1 und

Die Polynomreduktion

Sei $B \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$.

Die Reduktionsrelation $\succ_B$ auf $K[X_1, \ldots, X_n]$, die Polynomreduktion für B, wird wie folgt definiert.

$f \succ_B g$ gilt genau dann, wenn

- das größte Monom in f ist $m = c_1 * pp_1$ für $c \in K$ und ein Potenzprodukt pp_1 und
- es gibt ein Polynom $h \in B$ mit größtem Monom $u = c_2 * pp_2$ mit $pp_1 = v * pp_2$ und

Die Polynomreduktion

Sei $B \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$.

Die Reduktionsrelation $\succ_B$ auf $K[X_1, \ldots, X_n]$, die Polynomreduktion für B, wird wie folgt definiert.

$f \succ_B g$ gilt genau dann, wenn

- das größte Monom in f ist $m = c_1 * pp_1$ für $c \in K$ und ein Potenzprodukt pp_1 und
- es gibt ein Polynom $h \in B$ mit größtem Monom $u = c_2 * pp_2$ mit $pp_1 = v * pp_2$ und
- $g = f - c_1 * c_2^{-1} * v * h$

Ein konkretes Beispiel für die Polynomreduktion

Sei $B = \{h_1 = xy^2 - x, h_2 = x - y^3\}$
$f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$.
Für $h = h_1$ haben wir in der Notation der Definition der Polynomreduktion
$c_1 = c_2 = 1$, $pp_1 = x^7y^2$, $pp_2 = xy^2$ und $v = x^6$.
Für $g = f - c_1 * c_2^{-1} * v * h = x^7 + x^3y^2 - y + 1$ gilt dann

$$f \succ_B g$$

$$x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1 \succ_B x^7 + x^3y^2 - y + 1$$

Eigenschaften der Polynomreduktion

- Das Reduktionssystem $(K[X_1, \ldots, X_n], \succ_B)$ ist stets noethersch.

Eigenschaften der Polynomreduktion

- Das Reduktionssystem $(K[X_1, \ldots, X_n], \succ_B)$ ist stets noethersch.
- Es muß nicht immer konfluent sein.

Eigenschaften der Polynomreduktion

- Das Reduktionssystem $(K[X_1, \ldots, X_n], \succ_B)$ ist stets noethersch.
- Es muß nicht immer konfluent sein.
- Aber für jede Menge B gibt es eine Menge G, die dasselbe Ideal in dem Ring $K[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugt wie B, so daß $\succ_B$ konfluent ist.

  G läßt sich aus B berechnen, z.B. mit dem Buchbergerschen Algorithmus.

Beispiele für Reduktionssysteme

β-Reduktion im λ-Kalkül

Für zwei λ-Terme M, N ist die β-Reduktion $\succ_\beta$ definiert durch: $M \succ_\beta N$ genau dann, wenn

- ein Teiltermvorkommen $(\lambda x M_1)N_1$ in M gibt und

Beispiele für Reduktionssysteme

β-Reduktion im λ-Kalkül

Für zwei λ-Terme M, N ist die β-Reduktion $\succ_\beta$ definiert durch: $M \succ_\beta N$ genau dann, wenn

- ein Teiltermvorkommen $(\lambda x M_1)N_1$ in M gibt und
- N entsteht aus M, indem $(\lambda x M_1)N_1$ ersetzt wird $M_1[x \leftarrow N_1]$,

Beispiele für Reduktionssysteme

β-Reduktion im λ-Kalkül

Für zwei λ-Terme M, N ist die β-Reduktion $\succ_\beta$ definiert durch: $M \succ_\beta N$ genau dann, wenn

- ein Teiltermvorkommen $(\lambda x M_1)N_1$ in M gibt und
- N entsteht aus M, indem $(\lambda x M_1)N_1$ ersetzt wird $M_1[x \leftarrow N_1]$,
- wobei $M_1[x \leftarrow N_1]$ aus M_1 entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x ersetzt wird durch N_1.

Beispiele für Reduktionssysteme

β-Reduktion im λ-Kalkül

Für zwei λ-Terme M, N ist die β-Reduktion $\succ_\beta$ definiert durch: $M \succ_\beta N$ genau dann, wenn

- ein Teiltermvorkommen $(\lambda x M_1)N_1$ in M gibt und
- N entsteht aus M, indem $(\lambda x M_1)N_1$ ersetzt wird $M_1[x \leftarrow N_1]$,
- wobei $M_1[x \leftarrow N_1]$ aus M_1 entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x ersetzt wird durch N_1.

Eigenschaften:

- **Die β-Reduktion auf der Menge aller λ -Terme ist konfluent.**

Beispiele für Reduktionssysteme

β-Reduktion im λ-Kalkül

Für zwei λ-Terme M, N ist die β-Reduktion $\succ_\beta$ definiert durch: $M \succ_\beta N$ genau dann, wenn

- ein Teiltermvorkommen $(\lambda x M_1) N_1$ in M gibt und
- N entsteht aus M, indem $(\lambda x M_1) N_1$ ersetzt wird $M_1[x \leftarrow N_1]$,
- wobei $M_1[x \leftarrow N_1]$ aus M_1 entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x ersetzt wird durch N_1.

Eigenschaften:

- **Die β-Reduktion auf der Menge aller λ -Terme ist konfluent.**
- **Die β-Reduktion ist nicht noethersch, so hat z.B. der Term $(\lambda x(xx))\lambda x(xx)$ keine Normalform.**

Beispiele für Reduktionssysteme

Semi-Thue-Systeme

Sei R eine Menge von Paaren (r, s) von Wörtern über einem Alphabet Σ, d.h. $r, s \in \Sigma^*$. Die Relation $\succ_R$ auf der Menge Σ^* aller Wörter über Σ ist definiert durch:

$$u \succ_R v$$

gdw

es gibt $(r, s) \in R$ und $z, y \in \Sigma^*$, so daß $u = xry$ und $v = xsy$.

(Σ, R) heißt ein **Semi-Thue-System** (string rewriting system).

Im Unterschied zu den Termersetzungssystemen treten in Semi-Thue-Systemen keine Variablen auf und damit keine Substitutionen. Außerdem ist die interne Struktur von Wörtern wesentlich ärmer als die interne Struktur von Termen.