Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Übungsaufgabe 2 von Blatt 5

Elimination bedingter Terme

$(x \doteq \texttt{if } \phi \texttt{ then } t_1 \texttt{ else } t_2)$

Eine richtige Lösung:
$(\phi \land x \doteq t_1) \lor (\neg\phi \land x \doteq t_2)$

30% der abgegebenen Lösungen sahen etwa so aus:
$(\phi \land t_1) \lor (\neg\phi \land t_2)$

Das ist keine korrekte Syntax!

ϕ und $\neg\phi$ sind Formeln.
t_1 und t_2 sind Terme.
Nur Formel können mit $\land$ miteinander verbunden werden!

Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$\forall x((\texttt{if } f(x) \geq 0 \texttt{ then } f(x) \texttt{ else } -f(x)) \leq c)$

Elimination des bedingten Terms:

$\forall x((f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq c) \vee (\neg(f(x) \geq 0) \wedge -f(x) \leq c))$

Beispiele für Formeln
Beispiele für Terme

Formeln und Terme sind in unserem Ansatz grundverschiedene syntaktische Kategorien!

Tableaukalkül

für

Prädikatenlogik

Tableaukalkül

UniformeNotation

Typ α:

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	–
$0\neg A$	$1A$	–
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ:

F	F_1
$1\forall x A(x)$	$1A(x)$
$0\exists x A(x)$	$0A(x)$

Typ δ:

F	F_1
$1\exists x A(x)$	$1A(x)$
$0\forall x A(x)$	$0A(x)$

Zusammenfassung der Tableauregeln

α-Regel	$\dfrac{F}{\begin{array}{c}F_1\\F_2\end{array}}$	für α-Formeln F
β-Regel	$\dfrac{F}{F_1 \mid F_2}$	für β-Formeln F
γ-Regel	$\dfrac{F}{F_1(y)}$	für γ-Formeln F und eine neue Variable y
δ-Regel	$\dfrac{F}{F_1(f(x_1,\ldots,x_n))}$	für δ-Formeln F, wobei $x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in F sind und f ein neues n-stelliges Funktionssymbol

Zusammenfassung derTableauregeln

(Forts.)

G_l-Regel $\dfrac{1\ t \doteq s \quad F(t')}{\sigma F(s)}$ wobei $\sigma(t') = \sigma(t)$

G_r-Regel $\dfrac{1\ t \doteq s \quad F(s')}{\sigma F(t)}$ wobei $\sigma(s') = \sigma(s)$

Anfangsregel $\dfrac{}{0A}$ für die zu beweisende Formel A

A ohne freie Variable

V-Regel $\dfrac{}{1B}$ für jedes $B \in M$,

B ohne freie Variablen

Geschlossene Tableaux

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

σ *schließt* π, wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- Terme s, t gibt, so daß $\sigma(s) = \sigma(t)$ und $0s \doteq t$ auf π liegt oder
- eine der Formeln $0\mathbf{1}$ oder $1\mathbf{0}$ liegt auf π.

σ *schließt* ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt .

Abschlußregel

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ, die π schließt, und
Anwendung von σ auf das ganze Tableau T.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{cl}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & \text{(Start)} \\
| & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & \text{(Start)} \\
\quad | & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
\quad | & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
\quad
\overset{\text{C-Regel}}{\underset{\{X/Y\}}{\Longrightarrow}}
\quad
\begin{array}{c}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) \\
| \\
1\ \forall x\ p(x) \\
| \\
0\ \exists y\ p(y) \\
| \\
1\ p(X) \\
| \\
0\ p(X)
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

Ein geschlossenes Tableau

1[] $\quad 0\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$
2[1] $\quad 1\exists y \forall x p(x, y)$
3[1] $\quad 0\forall x \exists y p(x, y)$
4[2] $\quad 1\forall x p(x, a)$
5[3] $\quad 0\exists y p(b, y)$
6[4] $\quad 1 p(X, a)$
7[5] $\quad 0 p(b, Y)$
geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

Ein offenes Tableau

1[]	$0\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
2[1]	$0\exists y \forall x p(x, y)$
3[1]	$1\forall x \exists y p(x, y)$
4[2]	$0\forall x p(x, Y)$
5[3]	$1\exists y p(X, y)$
6[4]	$0p(f(Y), Y)$
7[5]	$1p(X, g(X))$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$\sigma(X) = \sigma(f(Y))$ und $\sigma(Y) = \sigma(g(X))$

also $\sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$

Tableau mit Gleichheit
1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[] $\quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$
3[2]	$1 f(f(X)) \doteq g(X)$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$
3[2]	$1 f(f(X)) \doteq g(X)$
4[1]	$0 f(g(c)) \doteq g(f(c))$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$
3[2]	$1f(f(X)) \doteq g(X)$
4[1]	$0f(g(c)) \doteq g(f(c))$
5[2]	$1f(f(Y)) \doteq g(Y)$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$1[]$	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$	
$2[V]$	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$	
$3[2]$	$1f(f(X)) \doteq g(X)$	
$4[1]$	$0f(g(c)) \doteq g(f(c))$	
$5[2]$	$1f(f(Y)) \doteq g(Y)$	
$6[5,3]$	$1f(g(Y)) \doteq g(f(Y))$	$\sigma(X) = f(Y)$

Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$	
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$	
3[2]	$1f(f(X)) \doteq g(X)$	
4[1]	$0f(g(c)) \doteq g(f(c))$	
5[2]	$1f(f(Y)) \doteq g(Y)$	
6[5, 3]	$1f(g(Y)) \doteq g(f(Y))$	$\sigma(X) = f(Y)$

geschlossen mit 6, 4 und $\mu(Y) = c$

Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 6

Regelformat:

$$\frac{1s \doteq t \qquad\qquad F(s') \qquad \text{mit } \sigma(s') = \sigma(s)}{\sigma F(t)}$$

Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 6

Regelformat:

$$\frac{\begin{array}{lll} 1s \doteq t & F(s') & \text{mit } \sigma(s') = \sigma(s) \\ 1\sigma(s) \doteq \sigma(t) & \sigma(F(s')) & \text{(Zwischenschritt)} \end{array}}{\sigma F(t)}$$

Regelanwendung:

$$\frac{\begin{array}{llll} 3 & 1f(f(Y)) \doteq g(Y) & 5 & 1f(f(X)) \doteq g(X) \\ 3 & 1f(f(Y)) \doteq g(Y) & 5 & 1f(f(f(Y))) \doteq g(f(Y)) \end{array}}{6 \;\; 1f(g(Y)) \doteq g(f(Y))}$$

$$\sigma(X) = f(Y)$$

Tableau mit Gleichheit
2. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

1[]	$0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$	
2[V]	$1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$	
3[2]	$1f(f(X)) \doteq g(X)$	
4[1]	$0f(g(c)) \doteq g(f(c))$	
5[4, 3]	$0f(f(f(c))) \doteq g(f(c))$	$\sigma(X) = c$
6[2]	$1f(f(Y)) \doteq g(Y)$	
	geschlossen mit 6, 5 und $\sigma(Y) = f(c)$	

Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 5

$$\frac{\begin{array}{lll} 1 t \doteq s & F(s') & \\ 1 \sigma(t) \doteq \sigma(s) = \sigma(s') & \sigma(F(s')) & \text{(Zwischenschritt)} \end{array}}{\sigma F(t)}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1 f(f(X)) \doteq g(X) & 0 f(g(c)) \doteq g(f(c)) \\ 1 f(f(c)) \doteq g(c) & 0 f(g(c)) \doteq g(f(c)) \end{array}}{1 f(f(f(c))) \doteq g(f(c))}$$

Mehrfache Anwendung der γ-Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$
Tableaubeweis:

$1[]\quad 1p(0)$
$2[]\quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$
$3[]\quad 0p(s(s(0)))$

$4[2]\quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$

$5[4]\quad 0p(X)$ | $6[4]\quad 1p(s(X))$

$\sigma_1(X) = 0$

$5a\quad 0p(0)$ | $6a\quad 1p(s(0))$

$7[2]\quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$

$8[7]\quad 0p(Y)$ | $9[7]\quad 1p(s(Y))$

$\sigma_2(Y) = s(0)$

$8a\quad 0p(s(0))$ | $9a\quad 1p(s(s(0)))$

Korrektheit

und

Vollständigkeit

Modellbegriff für Tableaux

Es seien $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$,
T ein Tableau für A über M und
$\mathcal{D}$ eine Interpretation über $\overline{\Sigma}$,
wobei $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.
$\mathcal{D}$ heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$ für alle F auf π.

Korrektheitslemma

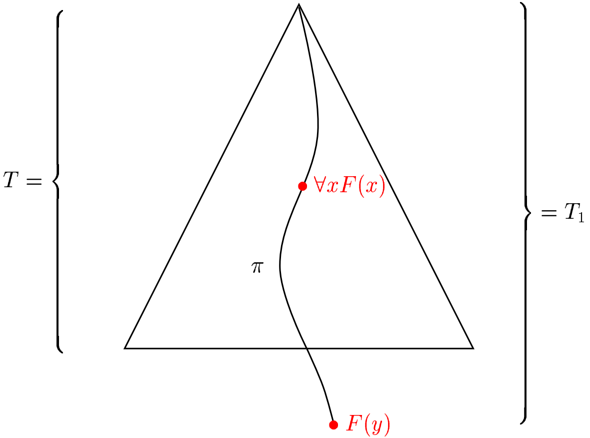
1. Teil

Theorem

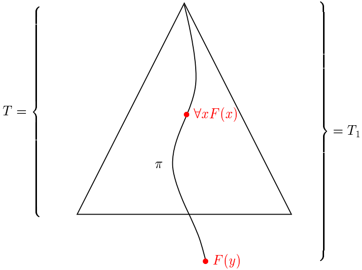
M sei eine Formelmenge.
Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Hat T ein Modell über M, dann auch T'.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall

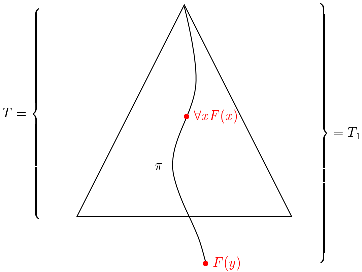


Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



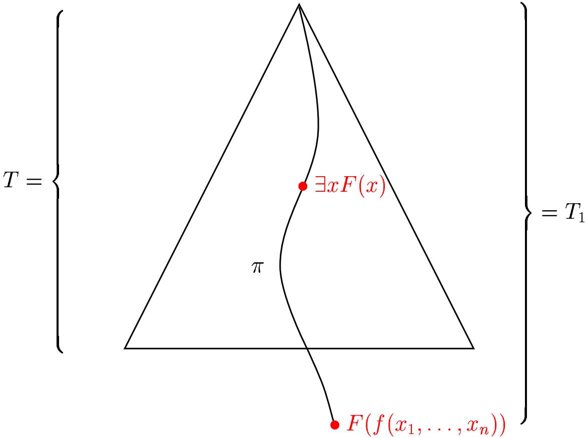
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.
Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1, fertig.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also
$(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M.

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \ldots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \ldots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \ldots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

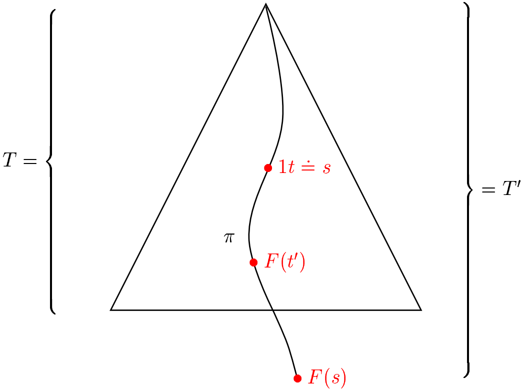
$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \ldots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \ldots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Beweis des Korrektheitslemma, G_l-Regel



$\sigma(t) = \sigma(t')$ $\qquad T_1 = \sigma(T')$

Beweis des Korrektheitslemma, G_l-Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.
Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = val_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem
$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D}, \beta') \models C$ für jede Formel C.

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$
Also auch $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi_0)$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models 1\sigma(t) = \sigma(s)$, $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(t'))$ und $\sigma(t') = \sigma(t)$ folgt

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(s)).$$

Insgesamt

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{\sigma(F(s))\}$$

Korrektheitslemma

2. Teil

Theorem

- *Ist $\mathcal{D}$ Modell von T über M*
- *und ensteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,*
- *dann ist $\mathcal{D}$ auch Modell von T'.*

Beweis des Korrektheitslemma

2. Teil

Gemäß Voraussetzung gibt es zu jeder Belegung β einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition.

Wir definieren $\beta'(y) = val_\beta(\sigma(y))$,

Nach dem Substitutionslemma gilt

$$(\mathcal{D}, \beta') \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \text{ für alle } C,$$

so daß aus $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi$ folgt:

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi)$$

Anfangstableau

Sei $A \in For_\Sigma, M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.
Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Korrektheitssatz des Tableaukalküls

Theorem

Sei $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[] $0\forall x \exists y p(x,y) \to \exists y \forall x p(x,y)$
2[1] $0\exists y \forall x p(x,y)$
3[1] $1\forall x \exists y p(x,y)$
4[2] $0\forall x p(x,Y)$
5[3] $1\exists y p(X,y)$
6[4] $0p(f(Y),Y)$
7[5] $1p(X,g(X))$
offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell $\mathcal{D}$ für alle Formeln in π:

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & \{a,b\} \\
f^{\mathcal{D}}(x) & = & \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases} \\
g^{\mathcal{D}}(x) & = & x \\
p^{\mathcal{D}}(x,y) & \Leftrightarrow & x = y
\end{array}
$$

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[]	$0 \forall x \exists y p(x,y) \to \exists y \forall x p(x,y)$
2[1]	$0 \exists y \forall x p(x,y)$
3[1]	$1 \forall x \exists y p(x,y)$
4[2]	$0 \forall x p(x,Y)$
5[3]	$1 \exists y p(X,y)$
6[4]	$0 p(f(Y),Y)$
7[5]	$1 p(X,g(X))$
8[2]	$0 \forall x p(x,V)$
9[3]	$1 \exists y p(U,y)$
10[8]	$0 p(f(V),V)$
11[9]	$1 p(U,g(U))$
	offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.

(H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F, dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.

(H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.

(H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.

(H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F.

(H 6) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

(H 7) Für jeden Grundterm t kommt $1t \doteq t$ in H vor.

Die Relation $\sim$

Für eine Menge H variablenfreier Formeln definieren wir:

$$t \sim^H s \quad \text{gdw.} \quad 1t \doteq s \in H$$

Kongruenzlemma

Lemma

Ist H eine Hintikka-Menge, dann ist $\sim^H$ eine Kongruenzrelation, d.h. $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation und erfüllt zusätzlich:

1. *aus $t_1 \sim^H s_1, \ldots, t_n \sim^H s_n$ folgt*
   $f(t_1, \ldots, t_n) \sim^H f(s_1, \ldots, s_n)$.
2. *aus $t_1 \sim^H s_1, \ldots, t_n \sim^H s_n$ und*
   $1p(t_1, \ldots, t_n) \in H$ *folgt*
   $1p(s_1, \ldots, s_n) \in H$.

für jedes Funktionszeichen f und jedes Prädikatssymbol p.

Beweis des Kongruenzlemmas
1.Teil: $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation

Reflexivität Wird durch (H 7) gewährleistet.

Transitivität Gilt $t \sim^H s$ und $s \sim^H r$,
dann gilt nach Definition $1t \doteq s \ \in H$ und $1s \doteq r \ \in H$.
Nach (H 5) liegt dann auch $1t \doteq r$ in H, d.h.es gilt $t \sim^H r$.

Symmetrie Gelte $s \sim^H r$, d.h. $1s \doteq r \ \in H$.
Nach (H 7) gilt auch $1s \doteq s \ \in H$,
woraus mit (H 5) auch $1r \doteq s \ \in H$ folgt.

Beweis des Kongruenzlemmas
2. Teil: Kongruenzeigenschaften

1. Gelte $t_1 \sim^H s_1, \ldots, t_n \sim^H s_n$.
   Nach Definition von $\sim^H$ gilt also auch $1 t_i \doteq s_i \ \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$.
   Wegen (H 7) liegt auch $1 f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)$ in H.
   Durch mehrfache Anwendung von (H 5) erhält man nacheinander
   $$1 f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, t_2, \ldots, t_n) \ \in H$$
   $$1 f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, s_2, t_3 \ldots, t_n) \ \in H$$
   bis
   $$1 f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, \ldots, s_n) \ \in H$$
   Also gilt $f(t_1, \ldots, t_n) \sim^H f(s_1, \ldots, s_n)$, wie behauptet.
2. Bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{[t] : t \text{ ein Grundterm}\}$$

wobei $[t]$ die Äquivalenzklasse von t bzgl. $\sim^H$ bezeichnet.

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch

$$I(f)([t_1], \ldots, [t_n]) \quad = \quad [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

$$([t_1], \ldots, [t_n]) \in I(p) \quad \Leftrightarrow \quad 1p(t_1, \ldots, t_n) \in H$$

Die Kongruenzeigenschaft von $\sim$ stellen die Unabhängigkeit von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklassen sicher.

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = [t]$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.
Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = [c].$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\begin{array}{rcll} I(t) & = & I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \ldots, t_n^{\mathcal{D}}) & \text{(Def. von } I(t)) \\ & = & I(f)([t_1], \ldots, [t_n]) & \text{(Ind.Vor.)} \\ & = & [f(t_1, \ldots, t_n)] & \text{(Def. von } I(f)) \end{array}$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.
(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \ldots, t_n)$
Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von $\mathcal{D}$.

2. Fall: $F = 1t \doteq s$.
Aus $F \in H$ folgt $t \sim^H s$, und damit $[t] = [s]$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 3)

3. Fall: $F = 0p(t_1, \ldots, t_n)$.
Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $1p(t_1, \ldots, t_n) \notin H$.
Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \ldots, t_n)$, d. h.
$(D, I) \models \neg p(t_1, \ldots, t_n)$

4. Fall: $F = 0t \doteq s$.
Sei $F \in H$.
Angenommen, es würde $t \sim^H s$ gelten, dann wegen der Kongruenzeigenschaft auch $0t \doteq t \in H$, was im Widerspruch zu (P7) steht. Also gilt $t \not\sim^H s$, d. h. $[t] \neq [s]$.

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache Konsequenzen aus (H 1) bis (H 4).

Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaux $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ-Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und
es sich um die n-te Anwendung der γ-Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $$M \models A$$
dann terminiert jedes

- *faire Verfahren,*
- *das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness gewährleistet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.
Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ-Formel unbeschränkt oft benutzt.
und jede Formel aus M kommt einmal dran.

Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \ldots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \ldots$ terminiert nicht.

Wir wollen eine Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi \cup \{1t \doteq t \mid t \text{ Grundterm}\}$ ist eine Hintikka- Menge.

Hintikka-Menge

Wiederholung

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.

(H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F, dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.

(H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.

(H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.

(H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F.

(H 6) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

(H 7) Für jeden Grundterm t kommt $1t \doteq t$ in H vor.

Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	wahr

Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$ allgemeingültig? Triviale Signaturen Σ ausgenommen.*
2. *Was ist die maximale Anzahl von γ-Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$?*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist nicht rekursiv aufzählbar.*