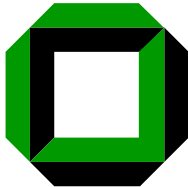


Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008



Übungsaufgabe 2 von Blatt 5

Elimination bedingter Terme

$(x \doteq \text{if } \phi \text{ then } t_1 \text{ else } t_2)$



Übungsaufgabe 2 von Blatt 5

Elimination bedingter Terme

$(x \doteq \text{if } \phi \text{ then } t_1 \text{ else } t_2)$

Eine richtige Lösung:

$(\phi \wedge x \doteq t_1) \vee (\neg \phi \wedge x \doteq t_2)$



Übungsaufgabe 2 von Blatt 5

Elimination bedingter Terme

$(x \doteq \text{if } \phi \text{ then } t_1 \text{ else } t_2)$

Eine richtige Lösung:

$(\phi \wedge x \doteq t_1) \vee (\neg \phi \wedge x \doteq t_2)$

30% der abgegebenen Lösungen sahen etwa so aus:

$(\phi \wedge t_1) \vee (\neg \phi \wedge t_2)$

Das ist keine korrekte Syntax!



Übungsaufgabe 2 von Blatt 5

Elimination bedingter Terme

$(x \doteq \text{if } \phi \text{ then } t_1 \text{ else } t_2)$

Eine richtige Lösung:

$(\phi \wedge x \doteq t_1) \vee (\neg\phi \wedge x \doteq t_2)$

30% der abgegebenen Lösungen sahen etwa so aus:

$(\phi \wedge t_1) \vee (\neg\phi \wedge t_2)$

Das ist keine korrekte Syntax!

ϕ und $\neg\phi$ sind Formeln.

t_1 und t_2 sind Terme.

Nur Formel können mit $\wedge$ miteinander verbunden werden!



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$

Elimination des bedingten Terms:



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$

Elimination des bedingten Terms:

$$\forall x((f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq c) \vee (\neg(f(x) \geq 0) \wedge -f(x) \leq c))$$



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$

Elimination des bedingten Terms:

$$\forall x((f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq c) \vee (\neg(f(x) \geq 0) \wedge -f(x) \leq c))$$

Beispiele für Formeln



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$

Elimination des bedingten Terms:

$$\forall x((f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq c) \vee (\neg(f(x) \geq 0) \wedge -f(x) \leq c))$$

Beispiele für Formeln

Beispiele für Terme



Bedingte Terme

Noch ein Beispiel

$$\forall x((\text{if } f(x) \geq 0 \text{ then } f(x) \text{ else } -f(x)) \leq c)$$

Elimination des bedingten Terms:

$$\forall x((f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq c) \vee (\neg(f(x) \geq 0) \wedge -f(x) \leq c))$$

Beispiele für Formeln

Beispiele für Terme

Formeln und Terme sind in unserem Ansatz grundverschiedene syntaktische Kategorien!



Tableaukalkül für Prädikatenlogik



Tableaukalkül

Uniforme Notation

Typ α :

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	$-$
$0\neg A$	$1A$	$-$
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β :

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$



Tableaukalkül

Uniforme Notation

Typ α :

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	$-$
$0\neg A$	$1A$	$-$
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β :

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ :

F	F_1
$1\forall x A(x)$	$1A(x)$
$0\exists x A(x)$	$0A(x)$

Typ δ :

F	F_1
$1\exists x A(x)$	$1A(x)$
$0\forall x A(x)$	$0A(x)$



Zusammenfassung der Tableauregeln

α -Regel $\frac{F}{F_1 \quad F_2}$ für α -Formeln F

β -Regel $\frac{F}{F_1 | F_2}$ für β -Formeln F



Zusammenfassung der Tableauregeln

α -Regel $\frac{F}{F_1 \quad F_2}$ für α -Formeln F

β -Regel $\frac{F}{F_1 | F_2}$ für β -Formeln F

γ -Regel $\frac{F}{F_1(y)}$ für γ -Formeln F und eine neue Variable y



Zusammenfassung der Tableauregeln

α -Regel	$\frac{F}{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array}}$	für α -Formeln F
β -Regel	$\frac{F}{F_1 F_2}$	für β -Formeln F
γ -Regel	$\frac{F}{F_1(y)}$	für γ -Formeln F und eine neue Variable y
δ -Regel	$\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$	für δ -Formeln F , wobei $x_1, \dots, x_n$ alle freien Variablen in F sind und f ein neues n -stelliges Funktionssymbol



Zusammenfassung der Tableauregeln

(Forts.)

G_l -Regel $\frac{1 \quad t \doteq s \quad F(t')}{\sigma F(s)} \quad \text{wobei } \sigma(t') = \sigma(t)$

G_r -Regel $\frac{1 \quad t \doteq s \quad F(s')}{\sigma F(t)} \quad \text{wobei } \sigma(s') = \sigma(s)$



Zusammenfassung der Tableauregeln

(Forts.)

$$G_I\text{-Regel} \quad \frac{1 \quad t \doteq s \quad F(t')}{\sigma F(s)} \quad \text{wobei } \sigma(t') = \sigma(t)$$

$$G_r\text{-Regel} \quad \frac{1 \quad t \doteq s \quad F(s')}{\sigma F(t)} \quad \text{wobei } \sigma(s') = \sigma(s)$$

$$\text{Anfangsregel} \quad \frac{}{0A} \quad \begin{array}{l} \text{für die zu beweisende Formel } A \\ A \text{ ohne freie Variable} \end{array}$$



Zusammenfassung der Tableauregeln

(Forts.)

$$G_I\text{-Regel} \quad \frac{1 \quad t \doteq s \quad F(t')}{\sigma F(s)} \quad \text{wobei } \sigma(t') = \sigma(t)$$

$$G_r\text{-Regel} \quad \frac{1 \quad t \doteq s \quad F(s')}{\sigma F(t)} \quad \text{wobei } \sigma(s') = \sigma(s)$$

$$\text{Anfangsregel} \quad \frac{}{0A} \quad \begin{array}{l} \text{für die zu beweisende Formel } A \\ A \text{ ohne freie Variable} \end{array}$$

$$V\text{-Regel} \quad \frac{}{1B} \quad \begin{array}{l} \text{für jedes } B \in M, \\ B \text{ ohne freie Variablen} \end{array}$$



Geschlossene Tableaux

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

σ *schließt* π , wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- eine der Formeln 01 oder 10 liegt auf π .



Geschlossene Tableaux

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

σ *schließt* π , wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- Terme s, t gibt, so daß $\sigma(s) = \sigma(t)$ und $0s \doteq t$ auf π liegt oder
- eine der Formeln **01** oder **10** liegt auf π .



Geschlossene Tableaux

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

σ *schließt* π , wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- Terme s, t gibt, so daß $\sigma(s) = \sigma(t)$ und $0s \doteq t$ auf π liegt oder
- eine der Formeln 01 oder 10 liegt auf π .



Geschlossene Tableaux

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

σ *schließt* π , wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- Terme s, t gibt, so daß $\sigma(s) = \sigma(t)$ und $0s \doteq t$ auf π liegt oder
- eine der Formeln 01 oder 10 liegt auf π .

σ *schließt* ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt.



Abschlußregel

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ , die π
schließt, und

Anwendung von σ auf das ganze Tableau T .



Ein einfaches Beispiel

0	$\forall x \, p(x) \rightarrow \exists y \, p(y)$	(Start)
1	$\forall x \, p(x)$	(α -Regel)
0	$\exists y \, p(y)$	(α -Regel)
1	$p(X)$	(γ -Regel)
0	$p(Y)$	(γ -Regel)

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau.



Ein einfaches Beispiel

0 $\forall x \, p(x) \rightarrow \exists y \, p(y)$ (Start)

|
1 $\forall x \, p(x)$ (α -Regel)

|
0 $\exists y \, p(y)$ (α -Regel)

|
1 $p(X)$ (γ -Regel)

|
0 $p(Y)$ (γ -Regel)

C-Regel

$\Rightarrow$
 $\{X/Y\}$

0 $\forall x \, p(x) \rightarrow \exists y \, p(y)$

|
1 $\forall x \, p(x)$

|
0 $\exists y \, p(y)$

|
1 $p(X)$

|
0 $p(X)$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.



Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$



Ein geschlossenes Tableau

$$1[] \quad 0\exists y\forall xp(x, y) \rightarrow \forall x\exists yp(x, y)$$

$$2[1] \quad 1\exists y\forall xp(x, y)$$

$$3[1] \quad 0\forall x\exists yp(x, y)$$



Ein geschlossenes Tableau

1[] 0 $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$

2[1] 1 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 0 $\forall x \exists y p(x, y)$

4[2] 1 $\forall x p(x, a)$



Ein geschlossenes Tableau

1[] 0 $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$
2[1] 1 $\exists y \forall x p(x, y)$
3[1] 0 $\forall x \exists y p(x, y)$
4[2] 1 $\forall x p(x, a)$
5[3] 0 $\exists y p(b, y)$



Ein geschlossenes Tableau

1[] 0 $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$

2[1] 1 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 0 $\forall x \exists y p(x, y)$

4[2] 1 $\forall x p(x, a)$

5[3] 0 $\exists y p(b, y)$

6[4] 1 $p(X, a)$



Ein geschlossenes Tableau

1[] $0\exists y\forall xp(x, y) \rightarrow \forall x\exists yp(x, y)$
2[1] $1\exists y\forall xp(x, y)$
3[1] $0\forall x\exists yp(x, y)$
4[2] $1\forall xp(x, a)$
5[3] $0\exists yp(b, y)$
6[4] $1p(X, a)$
7[5] $0p(b, Y)$



Ein geschlossenes Tableau

1[] 0 $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$

2[1] 1 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 0 $\forall x \exists y p(x, y)$

4[2] 1 $\forall x p(x, a)$

5[3] 0 $\exists y p(b, y)$

6[4] 1 $p(X, a)$

7[5] 0 $p(b, Y)$

geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$



Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$



Ein offenes Tableau

1[] 0 $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$

2[1] 0 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 1 $\forall x \exists y p(x, y)$



Ein offenes Tableau

1[] 0 $\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$

2[1] 0 $\exists y\forall x p(x, y)$

3[1] 1 $\forall x\exists y p(x, y)$

4[2] 0 $\forall x p(x, Y)$



Ein offenes Tableau

1[] 0 $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$

2[1] 0 $\exists y \forall x p(x, y)$

3[1] 1 $\forall x \exists y p(x, y)$

4[2] 0 $\forall x p(x, Y)$

5[3] 1 $\exists y p(X, y)$



Ein offenes Tableau

- 1[] 0 $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
- 2[1] 0 $\exists y \forall x p(x, y)$
- 3[1] 1 $\forall x \exists y p(x, y)$
- 4[2] 0 $\forall x p(x, Y)$
- 5[3] 1 $\exists y p(X, y)$
- 6[4] 0 $p(f(Y), Y)$



Ein offenes Tableau

- 1[] 0 $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
- 2[1] 0 $\exists y \forall x p(x, y)$
- 3[1] 1 $\forall x \exists y p(x, y)$
- 4[2] 0 $\forall x p(x, Y)$
- 5[3] 1 $\exists y p(X, y)$
- 6[4] 0 $p(f(Y), Y)$
- 7[5] 1 $p(X, g(X))$



Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten



Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$



Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \quad \models \quad \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0 \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$

$$5[2] \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y)$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$

$$5[2] \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y)$$

$$6[5, 3] \quad 1f(g(Y)) \doteq g(f(Y))$$

$$\sigma(X) = f(Y)$$



Tableau mit Gleichheit

1. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$

$$5[2] \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y)$$

$$6[5, 3] \quad 1f(g(Y)) \doteq g(f(Y))$$

$$\sigma(X) = f(Y)$$

geschlossen mit 6, 4 und $\mu(Y) = c$



Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 6

Regelformat:

$$\frac{1s \doteq t \qquad F(s') \quad \text{mit } \sigma(s') = \sigma(s)}{\sigma F(t)}$$



Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 6

Regelformat:

$$\frac{\begin{array}{lll} 1s \doteq t & F(s') & \text{mit } \sigma(s') = \sigma(s) \\ 1\sigma(s) \doteq \sigma(t) & \sigma(F(s')) & (\text{Zwischenschritt}) \end{array}}{\sigma F(t)}$$



Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 6

Regelformat:

$$\frac{\begin{array}{l} 1s \doteq t \quad F(s') \quad \text{mit } \sigma(s') = \sigma(s) \\ 1\sigma(s) \doteq \sigma(t) \quad \sigma(F(s')) \quad (\text{Zwischenschritt}) \end{array}}{\sigma F(t)}$$

Regelanwendung:

$$\frac{\begin{array}{ll} 3 \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y) & 5 \quad 1f(f(X)) \doteq g(X) \\ 3 \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y) & 5 \quad 1f(f(f(Y))) \doteq g(f(Y)) \end{array}}{\begin{array}{l} 6 \quad 1f(g(Y)) \doteq g(f(Y)) \\ \sigma(X) = f(Y) \end{array}}$$



Tableau mit Gleichheit

2. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

- 1[] 0 $\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$
- 2[V] 1 $\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$
- 3[2] 1 $f(f(X)) \doteq g(X)$
- 4[1] 0 $f(g(c)) \doteq g(f(c))$



Tableau mit Gleichheit

2. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$

$$5[4, 3] \quad 0f(f(f(c))) \doteq g(f(c))$$

$$\sigma(X) = c$$



Tableau mit Gleichheit

2. Version

$$\forall x(f(f(x)) \doteq g(x)) \models \forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$1[] \quad 0\forall x(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$$

$$2[V] \quad 1\forall x(f(f(x)) \doteq g(x))$$

$$3[2] \quad 1f(f(X)) \doteq g(X)$$

$$4[1] \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c))$$

$$5[4, 3] \quad 0f(f(f(c))) \doteq g(f(c)) \quad \sigma(X) = c$$

$$6[2] \quad 1f(f(Y)) \doteq g(Y)$$

geschlossen mit 6, 5 und $\sigma(Y) = f(c)$



Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 5

$$\frac{1t \doteq s \qquad F(s') \qquad 1\sigma(t) \doteq \sigma(s) = \sigma(s') \quad \sigma(F(s')) \quad (\text{Zwischenschritt})}{\sigma F(t)}$$



Tableau mit Gleichheit/Erklärung zu 5

$$\begin{array}{c}
 1t \doteq s \qquad F(s') \\
 1\sigma(t) \doteq \sigma(s) = \sigma(s') \quad \sigma(F(s')) \quad (\text{Zwischenschritt}) \\
 \hline
 \sigma F(t)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 1f(f(X)) \doteq g(X) \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c)) \\
 1f(f(c)) \doteq g(c) \quad 0f(g(c)) \doteq g(f(c)) \\
 \hline
 1f(f(f(c))) \doteq g(f(c))
 \end{array}$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

- 1[] $1p(0)$
- 2[] $1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$
- 3[] $0p(s(s(0)))$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$



Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X) \\ \sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y) \\ \sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$



Korrektheit und Vollständigkeit



Modellbegriff für Tableaux

Es seien $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$,
 T ein Tableau für A über M und
 $\mathcal{D}$ eine Interpretation über $\bar{\Sigma}$,
wobei $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.
 $\mathcal{D}$ heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M



Modellbegriff für Tableaux

Es seien $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$,
 T ein Tableau für A über M und
 $\mathcal{D}$ eine Interpretation über $\bar{\Sigma}$,
wobei $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.
 $\mathcal{D}$ heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$ für alle F auf π .



Korrektheitslemma

1. Teil

Theorem

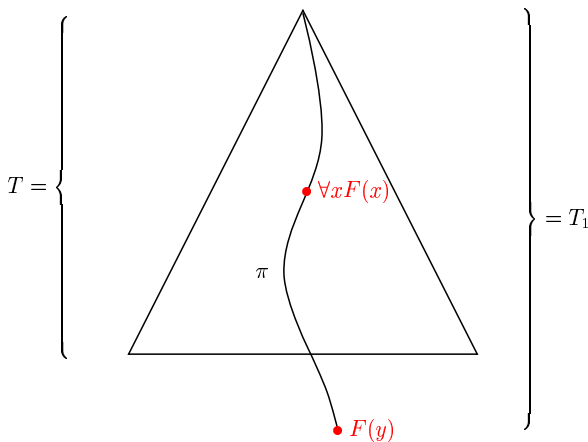
M sei eine Formelmenge.

Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

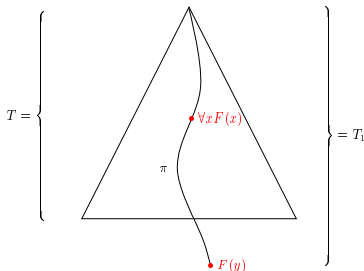
Hat T ein Modell über M , dann auch T' .



Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall



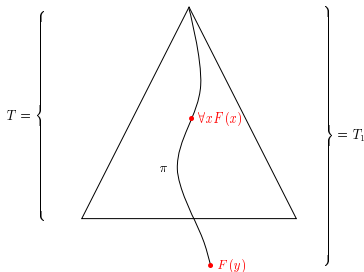
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1 , fertig.



Beweis des Korrektheitslemma, γ -Fall



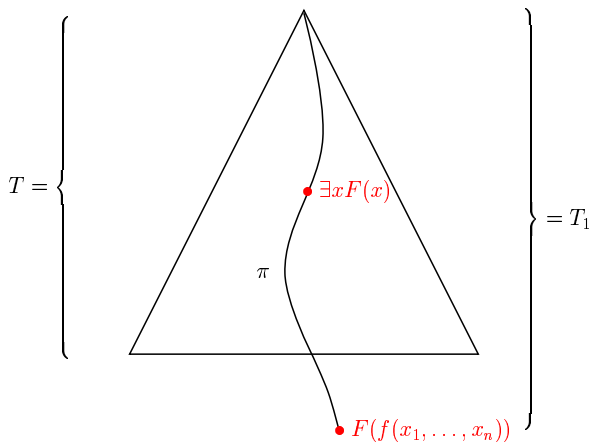
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M .



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \dots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

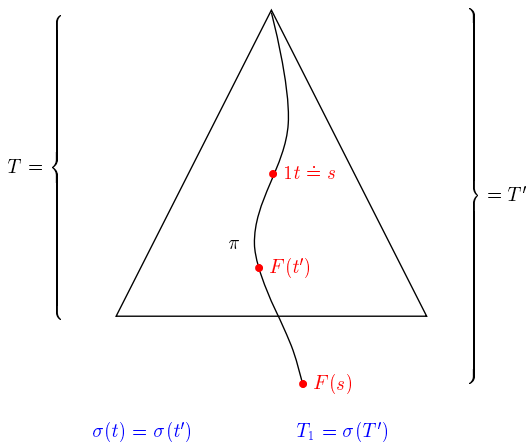
.

Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \iff (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$

Also auch $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi_0)$.



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$

Also auch $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi_0)$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \iff (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$

Also auch $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi_0)$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models 1\sigma(t) = \sigma(s)$, $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(t'))$ und $\sigma(t') = \sigma(t)$ folgt

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(s)).$$



Beweis des Korrektheitslemma, G_I -Regel

Nach Voraussetzung hat T ein Modell $\mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T' ist.

Sei β eine Belegung und β' definiert durch $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

dann gilt nach dem Substitutionstheorem

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \iff (\mathcal{D}, \beta') \models C \quad \text{für jede Formel } C.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu β' einen Pfad π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi_0$

Also auch $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi_0)$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models 1\sigma(t) = \sigma(s)$, $(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(t'))$ und $\sigma(t') = \sigma(t)$ folgt

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(F(s)).$$

Insgesamt

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{\sigma(F(s))\}$$



Korrektheitslemma

2. Teil

Theorem

- Ist $\mathcal{D}$ Modell von T über M
- und entsteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,
- dann ist $\mathcal{D}$ auch Modell von T' .



Beweis des Korrektheitslemma

2. Teil

Gemäß Voraussetzung gibt es zu jeder Belegung β einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition.

Wir definieren $\beta'(y) = \text{val}_\beta(\sigma(y))$,

Nach dem Substitutionslemma gilt

$$(\mathcal{D}, \beta') \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(C) \text{ für alle } C,$$

so daß aus $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi$ folgt:

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \sigma(\pi)$$



Anfangstableau

Sei $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.

Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$



Anfangstableau

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.

Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$



Anfangstableau

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.

Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.



Anfangstableau

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.

Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar



Korrektheitssatz des Tableaunkalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:



Korrektheitssatz des Tableaunkalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:



Korrektheitssatz des Tableaunkalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0 Anfangstableau

$\vdots$

T_k Zwischentableau

T_{k+1} Zwischentableau

$\vdots$

T_n geschlossenes Tableau



Korrektheitssatz des Tableaukalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen

Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0 Anfangstableau

$\vdots$

T_k Zwischentableau

T_{k+1} Zwischentableau

$\vdots$

T_n geschlossenes Tableau nicht erfüllbar



Korrektheitssatz des Tableaunkalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	
$\vdots$		
T_k	Zwischentableau	
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar



Korrektheitssatz des Tableaunkalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	
$\vdots$		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar



Korrektheitssatz des Tableaukalküls

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar



Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[] $0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$

2[1] $0\exists y\forall x p(x, y)$

3[1] $1\forall x\exists y p(x, y)$

4[2] $0\forall x p(x, Y)$

5[3] $1\exists y p(X, y)$

6[4] $0p(f(Y), Y)$

7[5] $1p(X, g(X))$

offener Pfad π



Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[] $0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$

2[1] $0\exists y\forall x p(x, y)$

3[1] $1\forall x\exists y p(x, y)$

4[2] $0\forall x p(x, Y)$

5[3] $1\exists y p(X, y)$

6[4] $0p(f(Y), Y)$

7[5] $1p(X, g(X))$

offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln



Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell $\mathcal{D}$ für alle Formeln in π :

$$D = \{a, b\}$$

$$f^{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases}$$

$$g^{\mathcal{D}}(x) = x$$

$$p^{\mathcal{D}}(x, y) \Leftrightarrow x = y$$



Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

- 1[] $0\forall x\exists yp(x, y) \rightarrow \exists y\forall xp(x, y)$
 - 2[1] $0\exists y\forall xp(x, y)$
 - 3[1] $1\forall x\exists yp(x, y)$
 - 4[2] $0\forall xp(x, Y)$
 - 5[3] $1\exists yp(X, y)$
 - 6[4] $0p(f(Y), Y)$
 - 7[5] $1p(X, g(X))$
 - 8[2] $0\forall xp(x, V)$
 - 9[3] $1\exists yp(U, y)$
 - 10[8] $0p(f(V), V)$
 - 11[9] $1p(U, g(U))$
- offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F .



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F .
- (H 6) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.



Hintikka-Menge

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F .
- (H 6) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.
- (H 7) Für jeden Grundterm t kommt $1t \doteq t$ in H vor.



Die Relation $\sim$

Für eine Menge H variablenfreier Formeln definieren wir:

$$t \sim^H s \quad \text{gdw.} \quad 1t \doteq s \in H$$



Kongruenzlemma

Lemma

Ist H eine Hintikka-Menge, dann ist $\sim^H$ eine Kongruenzrelation, d.h. $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation und erfüllt zusätzlich:

- ① aus $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$ folgt
 $f(t_1, \dots, t_n) \sim^H f(s_1, \dots, s_n)$.
- ② aus $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$ und
 $\models p(t_1, \dots, t_n) \in H$ folgt
 $\models p(s_1, \dots, s_n) \in H$.

für jedes Funktionszeichen f und jedes Prädikatssymbol p .



Beweis des Kongruenzlemmas

1. Teil: $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation

Reflexivität Wird durch (H 7) gewährleistet.



Beweis des Kongruenzlemmas

1. Teil: $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation

Reflexivität Wird durch (H 7) gewährleistet.

Transitivität Gilt $t \sim^H s$ und $s \sim^H r$,
dann gilt nach Definition $1t \doteq s \in H$ und $1s \doteq r \in H$.
Nach (H 5) liegt dann auch $1t \doteq r$ in H , d.h. es gilt $t \sim^H r$.



Beweis des Kongruenzlemmas

1. Teil: $\sim^H$ ist eine Äquivalenzrelation

Reflexivität Wird durch (H 7) gewährleistet.

Transitivität Gilt $t \sim^H s$ und $s \sim^H r$,
dann gilt nach Definition $1t \doteq s \in H$ und $1s \doteq r \in H$.
Nach (H 5) liegt dann auch $1t \doteq r$ in H , d.h. es gilt $t \sim^H r$.

Symmetrie Gelte $s \sim^H r$, d.h. $1s \doteq r \in H$.
Nach (H 7) gilt auch $1s \doteq s \in H$,
woraus mit (H 5) auch $1r \doteq s \in H$ folgt.



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.

Nach Definition von $\sim^H$ gilt also auch $1t_i \doteq s_i \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$.



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.

Nach Definition von $\sim^H$ gilt also auch $1t_i \doteq s_i \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wegen (H 7) liegt auch $1f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)$ in H .



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.

Nach Definition von $\sim^H$ gilt also auch $1t_i \doteq s_i \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wegen (H 7) liegt auch $1f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)$ in H .

Durch mehrfache Anwendung von (H 5) erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} 1f(t_1, \dots, t_n) &\doteq f(s_1, t_2, \dots, t_n) \in H \\ 1f(t_1, \dots, t_n) &\doteq f(s_1, s_2, t_3, \dots, t_n) \in H \\ &\text{bis} \\ 1f(t_1, \dots, t_n) &\doteq f(s_1, \dots, s_n) \in H \end{aligned}$$



Beweis des Kongruenzlemmas

2. Teil: Kongruenzeigenschaften

- ① Gelte $t_1 \sim^H s_1, \dots, t_n \sim^H s_n$.

Nach Definition von $\sim^H$ gilt also auch $1t_i \doteq s_i \in H$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wegen (H 7) liegt auch $1f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)$ in H .

Durch mehrfache Anwendung von (H 5) erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} 1f(t_1, \dots, t_n) &\doteq f(s_1, t_2, \dots, t_n) \in H \\ 1f(t_1, \dots, t_n) &\doteq f(s_1, s_2, t_3, \dots, t_n) \in H \\ &\text{bis} \end{aligned}$$

$$1f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(s_1, \dots, s_n) \in H$$

Also gilt $f(t_1, \dots, t_n) \sim^H f(s_1, \dots, s_n)$, wie behauptet.

- ② Bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.



Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{[t] : t \text{ ein Grundterm}\}$$

wobei $[t]$ die Äquivalenzklasse von t bzgl. $\sim^H$ bezeichnet.



Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{[t] : t \text{ ein Grundterm}\}$$

wobei $[t]$ die Äquivalenzklasse von t bzgl. $\sim^H$ bezeichnet.



Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{[t] : t \text{ ein Grundterm}\}$$

wobei $[t]$ die Äquivalenzklasse von t bzgl. $\sim^H$ bezeichnet.

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch

$$I(f)([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

$$([t_1], \dots, [t_n]) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

Die Kongruenzeigenschaft von $\sim$ stellen die Unabhängigkeit von der Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklassen sicher.



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = [t]$$



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = [t]$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.
Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = [c].$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) && \text{(Def. von } I(t)) \\ &= I(f)([t_1], \dots, [t_n]) && \text{(Ind.Vor.)} \\ &= [f(t_1, \dots, t_n)] && \text{(Def. von } I(f)) \end{aligned}$$



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.

(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von $\mathcal{D}$.



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.

(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von $\mathcal{D}$.

2. Fall: $F = 1t \doteq s$.

Aus $F \in H$ folgt $t \sim^H s$, und damit $[t] = [s]$



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 3)

3. Fall: $F = \neg p(t_1, \dots, t_n)$.

Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $\neg p(t_1, \dots, t_n) \notin H$.

Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h.
 $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 3)

3. Fall: $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$.

Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$.

Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h.
 $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

4. Fall: $F = 0t \doteq s$.

Sei $F \in H$.

Angenommen, es würde $t \sim^H s$ gelten, dann wegen der Kongruenzeigenschaft auch $0t \doteq t \in H$, was im Widerspruch zu (P7) steht. Also gilt $t \not\sim^H s$, d. h. $[t] \neq [s]$.



Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 3)

3. Fall: $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$.

Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$.

Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h.
 $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

4. Fall: $F = 0t \doteq s$.

Sei $F \in H$.

Angenommen, es würde $t \sim^H s$ gelten, dann wegen der Kongruenzeigenschaft auch $0t \doteq t \in H$, was im Widerspruch zu (P7) steht. Also gilt $t \not\sim^H s$, d. h. $[t] \neq [s]$.

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache Konsequenzen aus (H 1) bis (H 4).



Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.



Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaux $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.



Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaux $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.



Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaux $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.



Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaux $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.



Vollständigkeit des Tableaunkalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt
dann terminiert jedes

$$M \models A$$



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt
dann terminiert jedes

$$M \models A$$

- faire Verfahren,



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $\perp A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- und die Konstruktionsvorschrift einhält



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $\perp A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- und die Konstruktionsvorschrift einhält

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $\emptyset A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- und die Konstruktionsvorschrift einhält

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness gewährleistet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $\emptyset A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- und die Konstruktionsvorschrift einhält

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness gewährleistet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ -Formel unbeschränkt oft benutzt.



Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$

dann terminiert jedes

- faire Verfahren,
- das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,
- und die Konstruktionsvorschrift einhält

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness gewährleistet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ -Formel unbeschränkt oft benutzt.

und jede Formel aus M kommt einmal dran.



Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.



Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi \cup \{1t \doteq t \mid t \text{ Grundterm}\}$ ist eine Hintikka-Menge.



Hintikka-Menge

Wiederholung

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Liegt $1s \doteq t$ in H und $F \in H$, so daß s ein Teilterm von F ist,
dann gilt auch $F' \in H$ wobei F' aus F entsteht, indem ein
Vorkommen von s in F durch t ersetzt wird.
Dasselbe gilt analog für Terme t in F .
- (H 6) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.
- (H 7) Für jeden Grundterm t kommt $1t \doteq t$ in H vor.

Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz	geschlossenes Tableau
$p(x) \models \forall x p(x)$	$\forall x p(x)$ über $p(x)$



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$		$p(a)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$		$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$		$p(x)$ über $\exists x p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$		$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	



Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	wahr



Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:



Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

- 1 Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ allgemeingültig?
Triviale Signaturen Σ ausgenommen.



Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

- ① Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ allgemeingültig?
Triviale Signaturen Σ ausgenommen.
- ② Was ist die maximale Anzahl von γ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$?



Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem



Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

- 1 Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.



Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

- ① *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
- ② *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

