Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ liegt fest.

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\, in(y,x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation $(\mathcal{D}, I)$

Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation $(\mathcal{D}, I)$
- einer Variablenbelegung β

Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge

Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die

Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.
Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
    - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$

Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
   - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
   - für $n \geq 1$: jedem $n-$stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \to D$

Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
   - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
   - für $n \geq 1$: jedem $n-$stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \to D$
   - jedem $0-$stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$

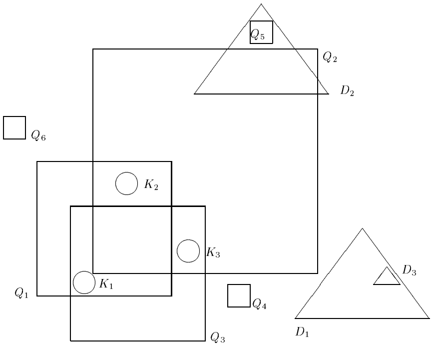
Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
   - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
   - für $n \geq 1$: jedem $n-$stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
   - jedem $0-$stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$
   - für $n \geq 1$: jedem $n-$stelligen Prädikatsymbol p eine $n-$stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.

Beispiel einer Interpretation (Tarski's World)



$P_\Sigma = \{k(\ ),\ q(\ ),\ d(\ ),\ kl(\ ),\ gr(\ ),\ in(\ ,\ )\}$ $D_{Bsp} = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$
$I_{Bsp}(q) = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\}$

$I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}$, $I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(in)\{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$

Variablenbelegung

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ.
Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : Var \rightarrow D.$$

Zu β, $x \in Var$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β an der Stelle x zu d:

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

Auswertung von Termen

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ und β eine Variablenbelegung über D.
Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_\Sigma$$
$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_\Sigma$$

$val_{D,I,\beta}$ auf $Term_\Sigma$:
$val_{D,I,\beta}(x) = \beta(x)$ für $x \in Var$
$val_{D,I,\beta}(f(t_1, \ldots, t_n)) = (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_n))$

Auswertung von Formeln

1. $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = W$
   $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = F$
   $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} W \text{ falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F \text{ sonst} \end{cases}$
   $val_{D,I,\beta}(P) := I(P)$ für 0-stellige Prädikate P

   $val_{D,I,\beta}(p(t_1, \ldots, t_n)) :=$
   $\begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), .., val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$

Auswertung von Formeln

2. $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.
   Ferner:
   $val_{D,I,\beta}(\forall x A) :=$
   $$\begin{cases} W & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

   $val_{D,I,\beta}(\exists x A) :=$
   $$\begin{cases} W & \text{falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \to \exists y(\ in(y,x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von $\to$
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(x) = Q1\ \in I(q)$, also $val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(q(x)) =\ W$.

Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von $\rightarrow$
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(x) = Q1\ \in I(q)$, also $val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(q(x)) =\ W$.

Formel rechts von $\rightarrow$
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(\exists y(\ in(y, x) \wedge kl(y)) =\ W$

Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y,x) \land kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von $\rightarrow$
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(x) = Q1\ \in I(q)$, also $val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(q(x)) =\ W$.

Formel rechts von $\rightarrow$
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(\exists y(\ in(y,x) \land kl(y)) =\ W$

Wähle K_1 als Belegung für y.

Beispiel
Fortsetzung

Die Auswertung von

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta_y^{K_1}}((\ in(y,x) \land kl(y)) = \ W$$

führt zu $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$ und $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$, was offensichtlich zutrifft.

Beispiel
Fortsetzung

Die Auswertung von

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta_y^{K_1}}((\ in(y,x) \wedge kl(y)) = \ W$$

führt zu $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$ und $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$, was offensichtlich zutrifft.

Insgesamt
$val_{\mathcal{D}_{Bsp},\beta}(q(x) \rightarrow \exists y(\ in(y,x) \wedge kl(y)) = \ W$

Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$
Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$

Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$

Die ganzen Zahlen in Java

$$\mathcal{Z}_{Jint} = (\mathbb{Z}_{Jint}, +_{Jint}, *_{Jint}, \leq_{Jint}).$$

wobei:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z}_{Jint} & = & [minInt, maxInt] \;=\; [-2147483648, 2147483647] \\ n +_{Jint} m & = & \text{nächste Folie} \\ n *_{Jint} m & = & \text{nächste Folie} \\ n \leq_{Jint} m & \Leftrightarrow & n \leq_{\mathcal{Z}} m \end{array}$$

Java Arithmetik

Für $n, m \in [minInt, maxInt]$ gilt

$$n +_{Jint} m = \begin{cases} n +_{\mathcal{Z}} m & \text{falls } n +_{\mathcal{Z}} m \in [minInt, maxInt] \\ minInt -_{\mathcal{Z}} 1 +_{\mathcal{Z}} ((n +_{\mathcal{Z}} m) -_{\mathcal{Z}} maxInt) & \\ \qquad \text{falls } n +_{\mathcal{Z}} m > maxInt & \\ maxInt + 1 + ((n +_{\mathcal{Z}} m) - minInt) & \\ \qquad \text{falls } n +_{\mathcal{Z}} m < minInt & \end{cases}$$

Z.B.

$$maxInt +_{Jint} 1 = minInt \text{ und } minInt -_{Jint} 1 = maxInt$$

Entsprechend für $*_{Jint}$.

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y(x < y)$		
$\forall x, y((x+1) * y = x * y + y)$		
$\exists x(0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	
$\forall x, y ((x+1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x + 1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x+1) * y = x * y + y)$	ja	
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	

Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{Jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x+1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \land x + 1 < 0)$	nein	ja

Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ *sei Interpretation,* β, γ *Variablenbelegungen*

1. *Gilt für den Term* t $\quad \beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Var(t)$*, dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(t) = val_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.

Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ *sei Interpretation,* β, γ *Variablenbelegungen*

1. *Gilt für den Term t* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Var(t)$*, dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(t) = val_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. *Gilt für die Formel A* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Frei(A)$*, dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.

Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\quad \beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in Var(t)$, dann $val_{\mathcal{D},\beta}(t) = val_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\quad \beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in Frei(A)$, dann $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in For_\Sigma$ geschlossen, dann gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. *Gilt für den Term t* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Var(t)$, *dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(t) = val_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. *Gilt für die Formel A* $\beta(x) = \gamma(x)$ *für alle* $x \in Frei(A)$, *dann* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. *Ist* $A \in For_\Sigma$ *geschlossen, dann gilt* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = val_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von *val*.

Substitutionslemma für Terme

Theorem

Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ,
β eine Belegung, σ eine Substitution und $t \in Term_\Sigma$.

Dann gilt

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = val_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in Var$.

Beweis

Strukturelle Induktion nach t.

Beweis

Induktionsanfang

Strukturelle Induktion nach t.

$t = x \in Var$:

$$
\begin{array}{rcll}
val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & = & \beta'(x) & \text{Def. von } \beta' \\
 & = & val_{\mathcal{D},\beta'}(x) & \text{Def. von } val(x)
\end{array}
$$

Beweis
Induktionsschritt

$$t = f(t_1, \ldots, t_n):$$

$$\begin{aligned} val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) = \\ = \quad & val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$

Beweis
Induktionsschritt

$t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$$

$$= \quad val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)))$$

Beweis
Induktionsschritt

$$t = f(t_1, \ldots, t_n):$$
$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$$
$$\begin{aligned} &= val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$

Beweis
Induktionsschritt

$t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$$

$$\begin{aligned} &= val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$

Beweis
Induktionsschritt

$t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$$

$$\begin{aligned} &= val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\ &\quad \text{(nach Induktionsannahme)} \end{aligned}$$

Beweis
Induktionsschritt

$t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$

$$
\begin{aligned}
&= val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \\
&= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\
&= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\
&\quad \text{(nach Induktionsannahme)}
\end{aligned}
$$

Beweis
Induktionsschritt

$t = f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \ldots, t_n))) =$$

$$\begin{aligned}
&= val_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))) \\
&= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\
&= I(f)(val_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \ldots, val_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\
&\quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\
&= val_{\mathcal{D},\beta'}(f(t_1, \ldots, t_n)).
\end{aligned}$$

Quiz
Kollosionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Subsitutionen ist kollisionsfrei für F?

σ_1 $\{x/a, z/b\}$
σ_2 $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$
σ_3 $\{x/(x+y), z/a\}$
σ_4 $\{x/y\}$
σ_5 $\{x/z\}$

Quiz

Kollosionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Subsitutionen ist kollisionsfrei für F?

σ_1	$\{x/a, z/b\}$	*kollisionsfrei*
σ_2	$\{x/(x+z), z/(x+z)\}$	*kollisionsfrei*
σ_3	$\{x/(x+y), z/a\}$	*Kollision*
σ_4	$\{x/y\}$	*Kollision*
σ_5	$\{x/z\}$	*kollisionsfrei*

Substitutionslemma für Formeln

Theorem

*Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ,
β eine Belegung, $A \in For_\Sigma$ und
σ eine für A kollisionsfreie Substitution.*

Dann gilt:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = val_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in Var$.

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{array}{llll} val_\beta(\sigma(\exists x A)) = & W & \text{gdw} & val_\beta(\exists x \sigma_x(A)) = W \\ & & & \text{Anwendung von } \sigma \end{array}$$

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$
\begin{array}{llll}
val_\beta(\sigma(\exists x A)) = & W & \text{gdw} & val_\beta(\exists x \sigma_x(A)) = \ W \\
 & & & \text{Anwendung von } \sigma \\
 & & \text{gdw} & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\
 & & & \text{Def. von } val
\end{array}
$$

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$
\begin{array}{lll}
val_\beta(\sigma(\exists x A)) = W & \text{gdw} & val_\beta(\exists x \sigma_x(A)) = W \\
 & & \text{Anwendung von } \sigma \\
 & \text{gdw} & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\
 & & \text{Def. von } val \\
 & \text{gdw} & val_{(\beta_x^d)''}(A) = W \qquad \text{Ind.Vor} \\
 & & \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y.
\end{array}
$$

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$
\begin{array}{lll}
val_\beta(\sigma(\exists x A)) = W & \text{gdw} & val_\beta(\exists x \sigma_x(A)) = W \\
 & & \text{Anwendung von } \sigma \\
 & \text{gdw} & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\
 & & \text{Def. von } val \\
 & \text{gdw} & val_{(\beta_x^d)''}(A) = W \qquad \text{Ind.Vor} \\
 & & \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y. \\
 & \text{gdw} & val_{(\beta')_x^d}(A) = W \qquad \text{Lücke}
\end{array}
$$

Beweis

Induktion nach A.
Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists x A$.
Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.
Außerdem: $\sigma_x(x) = x,\ \sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$
\begin{array}{llll}
val_\beta(\sigma(\exists x A)) = W & \text{gdw} & val_\beta(\exists x \sigma_x(A)) = W & \\
 & & \text{Anwendung von } \sigma & \\
 & \text{gdw} & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D & \\
 & & \text{Def. von } val & \\
 & \text{gdw} & val_{(\beta_x^d)''}(A) = W & \text{Ind.Vor} \\
 & & \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y. & \\
 & \text{gdw} & val_{(\beta')_x^d}(A) = W & \text{Lücke} \\
 & \text{gdw} & val_{\beta'}(\exists x A) = W & \\
 & & \text{Def. von } val &
\end{array}
$$

Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in Frei(A)$ zeigen
$(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$$(\beta_x^d)''(x) \quad = \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) \quad \text{Def. von } (\beta_x^d)''$$

Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in Frei(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$$\begin{array}{lcll} (\beta_x^d)''(x) & = & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) & \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ & = & val_{\beta_x^d}(x) & \text{Def. von } \sigma_x \end{array}$$

Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \mathit{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$$\begin{array}{lcll} (\beta_x^d)''(x) & = & \mathit{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) & \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ & = & \mathit{val}_{\beta_x^d}(x) & \text{Def. von } \sigma_x \\ & = & \beta_x^d(x) & \text{Def. von } \mathit{val} \text{ für Variable} \end{array}$$

Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \mathit{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$$\begin{array}{rcll} (\beta_x^d)''(x) & = & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) & \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ & = & val_{\beta_x^d}(x) & \text{Def. von } \sigma_x \\ & = & \beta_x^d(x) & \text{Def. von } \mathit{val} \text{ für Variable} \\ & = & d & \text{Def. der modifizierten Belegung} \end{array}$$

Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in Frei(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$$\begin{array}{rcll}
(\beta_x^d)''(x) & = & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) & \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\
 & = & val_{\beta_x^d}(x) & \text{Def. von } \sigma_x \\
 & = & \beta_x^d(x) & \text{Def. von } val \text{ für Variable} \\
 & = & d & \text{Def. der modifizierten Belegung} \\
 & = & (\beta')_x^d(x) & \text{Def. der modifizierten Belegung}
\end{array}$$

Beweis (Forts)

Schließen der Lücke

$y \neq x$, y frei in A:

$$
\begin{array}{rcll}
(\beta_x^d)''(y) & = & val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) & \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\
& = & val_{\beta_x^d}(\sigma(y)) & \text{Def. von } \sigma_x \\
& = & val_{\beta}(\sigma(y)) & \text{da } x \text{ nicht in } \sigma(y) \text{ vorkommt} \\
& & & \text{Kollisionsfreiheit von } \sigma \\
& = & \beta'(y) & \text{Def. von } \beta' \\
& = & (\beta')_x^d(y) & \text{Def. der modifizierten Belegung}
\end{array}
$$

Sir Anthony Hoare

Sir C.A.R.Hoare
Studied philosophy at Oxford U.
Graduate at Moscow State U. 1959
Programmer for Elliott Brothers, 1960
Prof. of CS at Queen's U. Belfast, 1968
An axiomatic basis for computer programimg
Communications ACM, 1969
Oxford U. Programming Research, 1977
Microsoft Research, Cambridge, now

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\}\ \mathsf{x} := \mathsf{s}\ \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.
Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\}\ \mathsf{x := s}\ \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.
Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks $x := s$

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} \; \mathsf{x} := \mathsf{s} \; \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.
Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks $x := s$
- ein Zustand erreicht wird, in dem die Formel A gilt.

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Programmzustand= Variablenbelegung β.

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Programmzustand= Variablenbelegung β.

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) \text{ falls } x = y \\ \beta(y) \text{ sonst} \end{cases}$$

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Programmzustand= Variablenbelegung β.

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) \text{ falls } x = y \\ \beta(y) \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Programmzustand= Variablenbelegung β.

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) \text{ falls } x = y \\ \beta(y) \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Das ist gerade die Aussage des Substitutionslemmas für die Formel A ist und die Substitution $\sigma = \{x/s\}$.

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

- $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A \rightarrow \sigma(A)) = \ W$

Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

- $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A \rightarrow \sigma(A)) = W$
- $val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists x A) = W.$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) \text{ falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) \text{ falls y = x} \end{cases}$$

Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) \text{ falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) \text{ falls y = x} \end{cases}$$

Also $\beta' = \beta_x^d$ für $d = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$.

Die zweite Aussage läßt sich analog beweisen.

Der Modellbegriff

- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ heißt **Modell** einer Formel A über Σ, wenn für jedes β gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$.

Der Modellbegriff

- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ heißt **Modell** einer Formel A über Σ, wenn für jedes β gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$.
- $\mathcal{D}$ heißt **Modell** einer Formelmenge M, wenn für jedes β und jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(B) = W$.

Der logische Folgerungsbegriff

Es sei $M \subseteq For_\Sigma, A \in For_\Sigma$.

$$M \models_\Sigma A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von M ist auch Modell von A.

Lies: **Aus** M **folgt** A (über Σ).

Kurznotationen:

$\models$ statt $\models_\Sigma$, $\models A$ für $\emptyset \models A$, $B \models A$ für $\{B\} \models A$.

Bemerkungen zum Modellbegriff

Theorem

$\mathcal{D}$ ist Modell von A	gdw	$\mathcal{D}$ ist Modell von $Cl_\forall A$
$\mathcal{D}$ ist Modell von $\neg A$	gdw	$\mathcal{D}$ ist Modell von $\neg Cl_\exists A$
$M \models A$	gdw	$Cl_\forall M \models A$
	gdw	$M \models Cl_\forall A$
	gdw	$Cl_\forall M \models Cl_\forall A$
	gdw	$M \cup \{\neg Cl_\forall A\}$ hat kein Modell

Hierbei steht $Cl_\forall A$ für den universellen Abschluß der Formel A und $Cl_\exists A$ für den existentiellen Abschluß

Allgemeingültigkeit

$A \in For_\Sigma$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$

Allgemeingültigkeit

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$
- **erfüllbar** gdw $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Allgemeingültigkeit

Theorem

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ *für alle $\mathcal{D}$ und alle β.*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
    1. *A allgemeingültig*
    2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
    3. *$val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ für alle $\mathcal{D}$ und alle β.*
    4. *$Cl_\forall A$ ist allgemeingültig.*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
    1. *A allgemeingültig*
    2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
    3. $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ *für alle $\mathcal{D}$ und alle β.*
    4. $Cl_\forall A$ *ist allgemeingültig.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ *für alle* $\mathcal{D}$ *und alle* β.
   4. $Cl_{\forall}A$ *ist allgemeingültig.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A erfüllbar*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ *für alle* $\mathcal{D}$ *und alle* β.
   4. $Cl_\forall A$ *ist allgemeingültig.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A erfüllbar*
   2. *Es gibt* $\mathcal{D}$ *und* β *mit* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ *für alle* $\mathcal{D}$ *und alle* β.
   4. $Cl_\forall A$ *ist allgemeingültig.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A erfüllbar*
   2. *Es gibt* $\mathcal{D}$ *und* β *mit* $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$
   3. $Cl_\exists A$ *hat ein Modell.*

Allgemeingültigkeit

Theorem

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A allgemeingültig*
   2. *Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A.*
   3. *$val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ für alle $\mathcal{D}$ und alle β.*
   4. *$Cl_\forall A$ ist allgemeingültig.*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   1. *A erfüllbar*
   2. *Es gibt $\mathcal{D}$ und β mit $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$*
   3. *$Cl_\exists A$ hat ein Modell.*
3. *Falls M keine freien Variablen enthält gilt:*
   $M \cup \{\neg A\}$ ist nicht erfüllbar gdw $M \models A$.

Logische Äquivalenz

A und *B* heißen *logisch äquivalent*
gdw
$\models A \leftrightarrow B$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x (A \land B) \leftrightarrow \forall x A \land \forall x B$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x (A \land B) \leftrightarrow \forall x A \land \forall x B$
6. $\exists x (A \lor B) \leftrightarrow \exists x A \lor \exists x B$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x (A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
6. $\exists x (A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
7. $A \wedge Q x B \leftrightarrow Q x (A \wedge B)$, falls $x \notin \mathit{Frei}(A)$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
7. $A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin Frei(A)$
8. $QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin Frei(B)$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
7. $A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin Frei(A)$
8. $QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin Frei(B)$
9. $A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B)$, falls $x \notin Frei(A)$

Beispiele für Äquivalenzen

1. $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$,
2. $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
3. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$,
4. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
7. $A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin \mathit{Frei}(A)$
8. $QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B)$, falls $x \notin \mathit{Frei}(B)$
9. $A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B)$, falls $x \notin \mathit{Frei}(A)$
10. $QxA \vee B \leftrightarrow Qx(A \vee B)$, falls $x \notin \mathit{Frei}(B)$

Beweisbeispiel

Voraussetzung: $x \notin Frei(A)$
Für alle $\mathcal{D}, \beta$ ist zu zeigen:

$$val_{\mathcal{D},\beta}(A \rightarrow \forall xB) = val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x(A \rightarrow B))$$

Falls $val_{\mathcal{D},\beta}(A \rightarrow \forall xB) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von *val* $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $val_{D,I,\beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:
$(val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \Rightarrow val_{D,I,\beta_x^d}(B) = W)$. (*)

Angenommen, es wäre $val_{D,I,\beta}(A \rightarrow \forall xB) = F$. Dann gilt also

$$val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W \quad \text{und} \quad val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xB) = F$$

es gibt also ein $e \in D$ mit $val_{\mathcal{D},\beta_x^e}(B) = F$.

Wegen $x \notin Frei(A)$ gilt auch $val_{\mathcal{D},\beta_x^e}(A) = W$. Aus $(*)$ folgt somit der Widerspruch
$val_{\mathcal{D},\beta_x^e}(B) = W$

Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x \forall y \forall z (r(x,y) \land r(y,z) \rightarrow r(x,z)) & & \\
\forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x)) & \models & \forall x r(x,x) \\
\forall x \exists y (r(x,y) & &
\end{array}
$$

Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{array}{lcl} \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z)) & & \\ \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x)) & \models & \forall x r(x,x) \\ \forall x \exists y (r(x,y) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Transitivität} & & \\ \text{Symmetrie} & \models & \text{Reflexivität} \\ \text{Endlosigkeit} & & \end{array}$$

Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{array}{ll}
\forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z)) & \\
\forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x)) & \models \quad \forall x r(x,x) \\
\forall x \exists y (r(x,y) &
\end{array}$$

Transitivität		
Symmetrie	$\models$	Reflexivität
Endlosigkeit		

Die Antwort ist

JA

2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg\exists x(a < x \wedge c(x) \wedge \forall y(a \leq y < x \rightarrow b(y))$$

$$\models$$

$$\exists x(a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y(a \leq y < x \rightarrow \neg b(y))$$

2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg\exists x(a < x \wedge c(x) \wedge \forall y(a \leq y < x \rightarrow b(y))$$

$$\models$$

$$\exists x(a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y(a \leq y < x \rightarrow \neg b(y))$$

Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{ccccc} a & & p_1 & & p_2 \\ \cdot & < & \cdot & < & \cdot \\ & & & & \\ b(a) & & \neg b(p_1) & & \neg b(p_2) \\ \neg c(a) & & \neg c(p_1) & & c(p_2) \end{array}$$