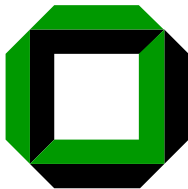


Formale Systeme

Prof. P.H. Schmitt

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2007/2008



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation $(\mathcal{D}, I)$
- einer Variablenbelegung β



Interpretation

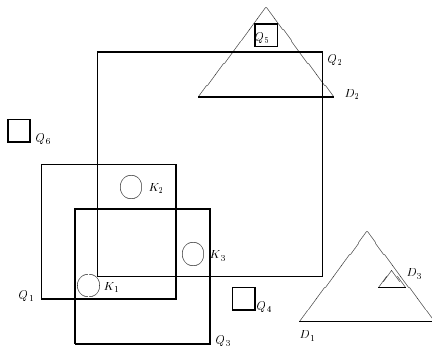
Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* $\mathcal{D}$ von Σ ist ein Paar (D, I) mit

- ① D ist eine beliebige, nichtleere Menge
- ② I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Prädikatsymbol p eine n -stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.



Beispiel einer Interpretation (Tarski's World)



$P_{\Sigma} = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ $D_{Bsp} = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(q) = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\}$

$I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}$, $I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(in) = \{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$



Variablenbelegung

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ .

Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : \text{Var} \rightarrow D.$$

Zu β , $x \in \text{Var}$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β an der Stelle x zu d :

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$



Auswertung von Termen

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ und β eine Variablenbelegung über D .

Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_{\Sigma}$$

$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_{\Sigma}$$

$val_{D,I,\beta}$ auf $Term_{\Sigma}$:

$$val_{D,I,\beta}(x) = \beta(x) \text{ für } x \in Var$$

$$val_{D,I,\beta}(f(t_1, \dots, t_n)) = (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n))$$



Auswertung von Formeln

- 1 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = W$
 $val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = F$
 $val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} W & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
 $val_{D,I,\beta}(P) := I(P)$ für 0-stellige Prädikate P

 $val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) :=$
 $\begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$



Auswertung von Formeln

- ② $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.

Ferner:

$$val_{D,I,\beta}(\forall x A) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(\exists x A) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von $\rightarrow$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q1 \in I(q), \text{ also } val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = W.$$

Formel rechts von $\rightarrow$

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

Wähle K_1 als Belegung für y .



Beispiel

Fortsetzung

Die Auswertung von

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta_y^{K_1}} ((in(y, x) \wedge kl(y)) = W$$

führt zu $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$ und $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$, was offensichtlich zutrifft.

Insgesamt

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x) \rightarrow \exists y (in(y, x) \wedge kl(y)) = W$$



Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$

Die ganzen Zahlen in Java

$$\mathcal{Z}_{Jint} = (\mathbb{Z}_{Jint}, +_{Jint}, *_{Jint}, \leq_{Jint}).$$

wobei:

$$\mathbb{Z}_{Jint} = [\text{minInt}, \text{maxInt}] = [-2147483648, 2147483647]$$

$$n +_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n *_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n \leq_{Jint} m \Leftrightarrow n \leq_{\mathcal{Z}} m$$



Java Arithmetik

Für $n, m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}]$ gilt

$$n +_{Jint} m = \begin{cases} n +_Z m & \text{falls } n +_Z m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}] \\ \text{minInt} -_Z 1 +_Z ((n +_Z m) -_Z \text{maxInt}) & \text{falls } n +_Z m > \text{maxInt} \\ \text{maxInt} + 1 + ((n +_Z m) - \text{minInt}) & \text{falls } n +_Z m < \text{minInt} \end{cases}$$

Z.B.

$$\text{maxInt} +_{Jint} 1 = \text{minInt} \text{ und } \text{minInt} -_{Jint} 1 = \text{maxInt}$$

Entsprechend für $*_{Jint}$.



Vergleich von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{jint}$

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x, y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	ja



Koinzidenzlemma

Theorem

$\mathcal{D}$ sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

- 1 Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
- 2 Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
- 3 Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von val .



Substitutionslemma für Terme

Theorem

Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung, σ eine Substitution und $t \in \text{Term}_\Sigma$.

Dann gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.



Beweis

Strukturelle Induktion nach t .



Beweis

Induktionsanfang

Strukturelle Induktion nach t .

$t = x \in Var$:

$$\begin{aligned} val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) &= \beta'(x) && \text{Def. von } \beta' \\ &= val_{\mathcal{D},\beta'}(x) && \text{Def. von } val(x) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t &= f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t &= f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t &= f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_n)) \\ &\quad (\text{nach Induktionsannahme}) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_n)) \\ & \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t &= f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \\ &= I(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(t_n)) \\ &\quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta'}(f(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$



Quiz

Kollisionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- | | | |
|------------|------------------------|-----------------------|
| σ_1 | $\{x/a, z/b\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_2 | $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_3 | $\{x/(x+y), z/a\}$ | <i>Kollision</i> |
| σ_4 | $\{x/y\}$ | <i>Kollision</i> |
| σ_5 | $\{x/z\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |



Substitutionslemma für Formeln

Theorem

Σ sei eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung, $A \in \text{For}_\Sigma$ und
 σ eine für A **kollisionsfreie** Substitution.

Dann gilt:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{aligned} val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W & \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W \\ & \quad \text{Anwendung von } \sigma \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\ & \quad \text{Def. von } val \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{(\beta_x^d)''}(A) = W \quad \text{Ind.Vor} \\ & \quad \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y. \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{(\beta')_x^d}(A) = W \quad \text{Lücke} \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{\beta'}(\exists xA) = W \\ & \quad \text{Def. von } val \end{aligned}$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen $(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y)$.

$y = x$:

$(\beta_x^d)''(x)$	$=$	$\text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x))$	Def. von $(\beta_x^d)''$
	$=$	$\text{val}_{\beta_x^d}(x)$	Def. von σ_x
	$=$	$\beta_x^d(x)$	Def. von val für Variable
	$=$	d	Def. der modifizierten Belegung
	$=$	$(\beta')_x^d(x)$	Def. der modifizierten Belegung



Beweis (Forts)

Schließen der Lücke

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}(\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y)) && \text{da } x \text{ nicht in } \sigma(y) \text{ vorkommt} \\ & && \text{Kollisionsfreiheit von } \sigma \\ &= \beta'(y) && \text{Def. von } \beta' \\ &= (\beta')_x^d(y) && \text{Def. der modifizierten Belegung}\end{aligned}$$



Sir Anthony Hoare



Sir C.A.R.Hoare

Studied philosophy at Oxford U.

Graduate at Moscow State U. 1959

Programmer for Elliott Brothers, 1960

Prof. of CS at Queen's U. Belfast, 1968

*An axiomatic basis for computer
programming*

Communications ACM, 1969

Oxford U. Programming Research, 1977

Microsoft Research, Cambridge, now



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks $x := s$
- ein Zustand erreicht wird, in dem die Formel A gilt.



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation $\mathcal{H}$.

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Das ist gerade die Aussage des Substitutionslemmas für die Formel A ist und die Substitution $\sigma = \{x/s\}$.



Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ , β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

- $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA \rightarrow \sigma(A)) = W$
- $val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists xA) = W.$



Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Also $\beta' = \beta_x^d$ für $d = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$.

Die zweite Aussage läßt sich analog beweisen.



Der Modellbegriff

- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ heißt **Modell** einer Formel A über Σ , wenn für jedes β gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$.
- $\mathcal{D}$ heißt **Modell** einer Formelmenge M , wenn für jedes β und jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(B) = W$.



Der logische Folgerungsbegriff

Es sei $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$.

$$M \models_\Sigma A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von M ist auch Modell von A .

Lies: **Aus** M **folgt** A (über Σ).

Kurznotationen:

$\models$ statt $\models_\Sigma$,

$\models A$ für $\emptyset \models A$,

$B \models A$ für $\{B\} \models A$.



Bemerkungen zum Modellbegriff

Theorem

$\mathcal{D}$ ist Modell von A	gdw	$\mathcal{D}$ ist Modell von $Cl_{\forall}A$
$\mathcal{D}$ ist Modell von $\neg A$	gdw	$\mathcal{D}$ ist Modell von $\neg Cl_{\exists}A$
$M \models A$	gdw	$Cl_{\forall}M \models A$
	gdw	$M \models Cl_{\forall}A$
	gdw	$Cl_{\forall}M \models Cl_{\forall}A$
	gdw	$M \cup \{\neg Cl_{\forall}A\}$ hat kein Modell

Hierbei steht $Cl_{\forall}A$ für den universellen Abschluß der Formel A und $Cl_{\exists}A$ für den existentiellen Abschluß



Allgemeingültigkeit

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$
- **erfüllbar** gdw $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.



Allgemeingültigkeit

Theorem

- ① Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - ① A allgemeingültig
 - ② Jede Interpretation $\mathcal{D}$ ist Modell von A .
 - ③ $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ für alle $\mathcal{D}$ und alle β .
 - ④ $Cl_{\forall}A$ ist allgemeingültig.
- ② Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - ① A erfüllbar
 - ② Es gibt $\mathcal{D}$ und β mit $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$
 - ③ $Cl_{\exists}A$ hat ein Modell.
- ③ Falls M keine freien Variablen enthält gilt:
 $M \cup \{\neg A\}$ ist nicht erfüllbar gdw $M \models A$.



Logische Äquivalenz

A und B heißen *logisch äquivalent*

gdw

$$\models A \leftrightarrow B$$



Beispiele für Äquivalenzen

- ① $\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A,$
- ② $\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
- ③ $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A,$
- ④ $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$
- ⑤ $\forall x (A \wedge B) \leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$
- ⑥ $\exists x (A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$
- ⑦ $A \wedge Qx B \leftrightarrow Qx (A \wedge B),$ falls $x \notin \text{Frei}(A)$
- ⑧ $Qx A \wedge B \leftrightarrow Qx (A \wedge B),$ falls $x \notin \text{Frei}(B)$
- ⑨ $A \vee Qx B \leftrightarrow Qx (A \vee B),$ falls $x \notin \text{Frei}(A)$
- ⑩ $Qx A \vee B \leftrightarrow Qx (A \vee B),$ falls $x \notin \text{Frei}(B)$



Beweisbeispiel

Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$

Für alle $\mathcal{D}, \beta$ ist zu zeigen:

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$$

Falls $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:

$$(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow \text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta_x^d}(B) = W). \quad (*)$$

Angenommen, es wäre $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = F$. Dann gilt also

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A) = W \quad \text{und} \quad \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x B) = F$$

es gibt also ein $e \in D$ mit $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = F$.

Wegen $x \notin \text{Frei}(A)$ gilt auch $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(A) = W$. Aus $(*)$ folgt somit der Widerspruch

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = W$$



Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \models \forall x r(x, x)$$

Transitivität

Symmetrie $\models$ Reflexivität

Endlosigkeit

Die Antwort ist

JA



2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

$\models$

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$

Gegenbeispiel:

a		p_1		p_2
$\cdot$	$<$	$\cdot$	$<$	$\cdot$
$b(a)$		$\neg b(p_1)$		$\neg b(p_2)$
$\neg c(a)$		$\neg c(p_1)$		$c(p_2)$

