

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

① Hilbert-Kalkül



Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

- ① Hilbert-Kalkül
- ② Resolutionskalkül



Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

- ① Hilbert-Kalkül
- ② Resolutionskalkül
- ③ **Tableaukalkül**



Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

- ① Hilbert-Kalkül
- ② Resolutionskalkül
- ③ Tableaukalkül
- ④ Sequenzenkalkül



Der aussagenlogische Tableaukalkül

Der Tableaukalkül ist ein Widerlegungskalkül

Er ist korrekt und vollständig:

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T0}} \mathbf{0}.$$



Der aussagenlogische Tableaunkalkül

Der Tableaunkalkül ist ein Widerlegungskalkül

Er ist korrekt und vollständig:

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\text{T0}} \mathbf{0}.$$

Er leistet aber noch mehr: wenn $M \not\models A$ und M endlich ist, dann wird eine Interpretation I geliefert, so dass val_I auf M wahr und auf A falsch ist.



Vorzeichenformel

Unserer Behandlung des Tableaukalküls liegt die aussagenlogische Sprache über den Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ zugrunde.

Eine

Vorzeichenformel

ist eine Zeichenkette der Gestalt

$0A$ oder $1A$ mit $A \in For_0$.

0, 1 sind neue Sonderzeichen, die Vorzeichen, im Alphabet der Objektsprache.

Die Spracherweiterung ist nicht notwendig, sondern dient nur der Durchsichtigkeit und Anschaulichkeit des Tableauverfahrens und bietet ausserdem einen Ansatzpunkt für Verallgemeinerungen auf Tableauverfahren für nichtklassische Logiken.



Uniforme Notation

Typen von Vorzeichenformeln:

Typ ϵ $0P, 1P$ für $P \in \Sigma$

Typ α $0\neg B, 1\neg B, 1(B \wedge C), 0(B \vee C), 0(B \rightarrow C)$

Typ β $0(B \wedge C), 1(B \vee C), 1(B \rightarrow C)$



Uniforme Notation

Fortsetzung

Abkömmlinge: Zu jedem V definieren wir *Abkömmlinge* V_1, V_2

Vom Typ α	V_1	V_2
$0\neg B$	$1B$	$1B$
$1\neg B$	$0B$	$0B$
$1(B \wedge C)$	$1B$	$1C$
$0(B \vee C)$	$0B$	$0C$
$0(B \rightarrow C)$	$1B$	$0C$
Vom Typ β	V_1	V_2
$0(B \wedge C)$	$0B$	$0C$
$1(B \vee C)$	$1B$	$1C$
$1(B \rightarrow C)$	$0B$	$1C$

Elementare Vorzeichenformeln haben keine Abkömmlinge.

Semantik von Vorzeichenformeln

Ist I eine Interpretation der Atome und val_I die zugehörige Auswertung der Formeln ohne Vorzeichen in $For0_\Sigma$.

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$



Die Rolle der Abkömmlinge

Lemma

Für eine Vorzeichenformel V gilt

vom Typ α :

$$\text{val}_I(V) = W \Leftrightarrow \text{val}_I(V_1) = W \quad \text{und} \quad \text{val}_I(V_2) = W$$

vom Typ β :

$$\text{val}_I(V) = W \Leftrightarrow \text{val}_I(V_1) = W \quad \text{oder} \quad \text{val}_I(V_2) = W$$



Tableaux

$M \subseteq \text{For}_0, A \in \text{For}_0$. Ein **Tableau** für A über M ist ein Binärbaum dessen Knoten mit Formeln markiert sind. Tableaux werden gemäss der folgenden Regeln rekursiv aufgebaut:

- 1 Ein einziger mit $0A$ markierter Knoten ist ein Tableau für A über M .



Tableaux

$M \subseteq \text{For0}, A \in \text{For0}$. Ein **Tableau** für A über M ist ein Binärbaum dessen Knoten mit Formeln markiert sind. Tableaux werden gemäss der folgenden Regeln rekursiv aufgebaut:

- 1 Ein einziger mit $0A$ markierter Knoten ist ein Tableau für A über M .
- 2 Es sei T ein Tableau für A über M und π ein Pfad in T , so dass auf π ein Knoten liegt, der mit einem V vom Typ α beschriftet ist. Dann ist auch T_1 ein Tableau für A über M , welches dadurch aus T entsteht, dass an π zwei neue Knoten angefügt werden, welche mit V_1 und mit V_2 beschriftet sind. Wir sagen in diesem Fall, dass T_1 aus T durch eine Anwendung der α -**Regel** aus T hervorgeht.



Tableaux

[Fortsetzung]

- ⑧ Es sei T ein Tableau für A über M und π ein Pfad in T , so dass auf π ein Knoten liegt, der mit einem V vom Typ β beschriftet ist. Dann ist auch T_2 ein Tableau für A über M , welches dadurch entsteht, dass an π zwei verzweigende Kanten angefügt werden, welche zu neuen Blättern mit Beschriftungen V_1 bzw. V_2 führen. Wir sagen, T_2 geht aus T durch eine Anwendung der **β -Regel** aus T hervor.



Tableaux

[Fortsetzung]

- ③ Es sei T ein Tableau für A über M und π ein Pfad in T , so dass auf π ein Knoten liegt, der mit einem V vom Typ β beschriftet ist. Dann ist auch T_2 ein Tableau für A über M , welches dadurch entsteht, dass an π zwei verzweigende Kanten angefügt werden, welche zu neuen Blättern mit Beschriftungen V_1 bzw. V_2 führen. Wir sagen, T_2 geht aus T durch eine Anwendung der **β -Regel** aus T hervor.
- ④ Es sei T ein Tableau für A über M und π ein Pfad in T , dann ist auch T_3 ein Tableau für A über M , welches durch Verlängerung von π um einen mit $1B$ beschrifteten Knoten entsteht, für eine Formel B aus M . Wir sagen, T_3 geht aus T durch eine Anwendung der **Voraussetzungsregel** aus T hervor.



Ableitbarkeit im Tableau Kalkül

- Ein Tableau T heisst **geschlossen**, wenn alle seine Pfade geschlossen sind.



Ableitbarkeit im Tableau Kalkül

- Ein Tableau T heisst **geschlossen**, wenn alle seine Pfade geschlossen sind.
- Ein Pfad π heisst **geschlossen**, wenn zwei Knoten auf π liegen, welche mit $0A$ und $1A$ beschriftet sind für eine beliebige Formel A . Auch ein Pfad, auf dem die Formel $0\mathbf{1}$ oder $\mathbf{10}$ vorkommt zählt als geschlossen.



Ableitbarkeit im Tableau Kalkül

- Ein Tableau T heisst **geschlossen**, wenn alle seine Pfade geschlossen sind.
- Ein Pfad π heisst **geschlossen**, wenn zwei Knoten auf π liegen, welche mit $0A$ und $1A$ beschriftet sind für eine beliebige Formel A . Auch ein Pfad, auf dem die Formel $0\mathbf{1}$ oder $\mathbf{10}$ vorkommt zählt als geschlossen.
- Es sei $A \in For_{0\Sigma}$ und $M \subseteq For_{0\Sigma}$. A ist aus M *ableitbar in* $\mathbf{T0}$,

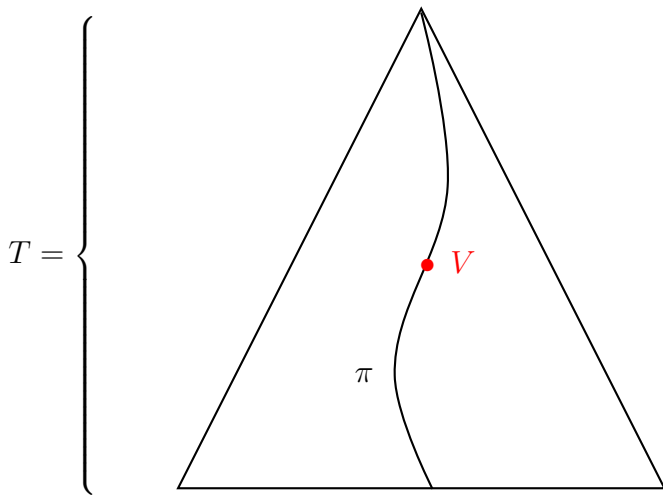
$$M \vdash_{\mathbf{T0}} A,$$

g.d.w.

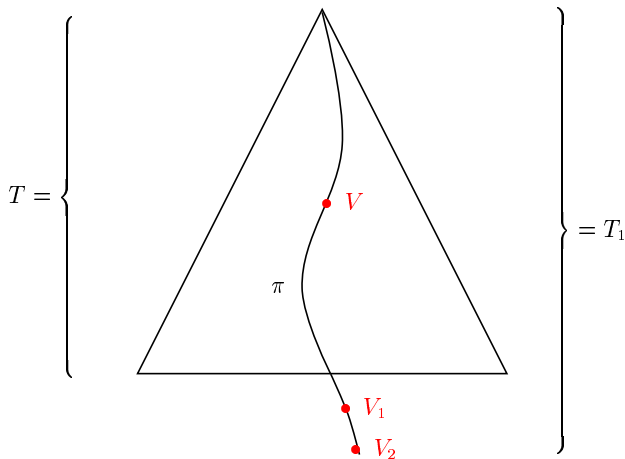
es ein geschlossenes Tableau für $0A$ über M gibt.



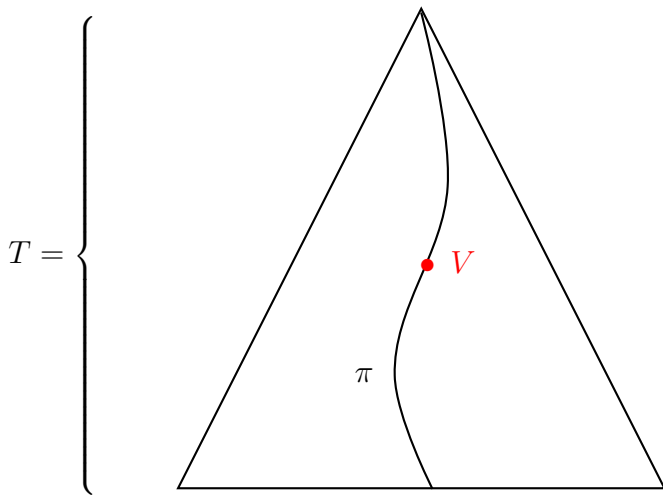
α -Erweiterung eines Tableau



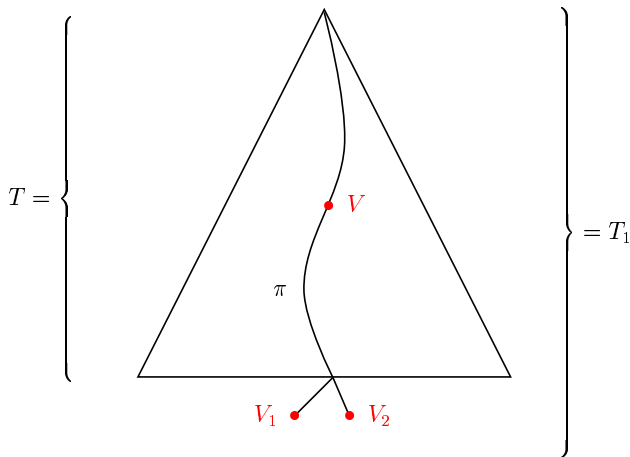
α -Erweiterung eines Tableau



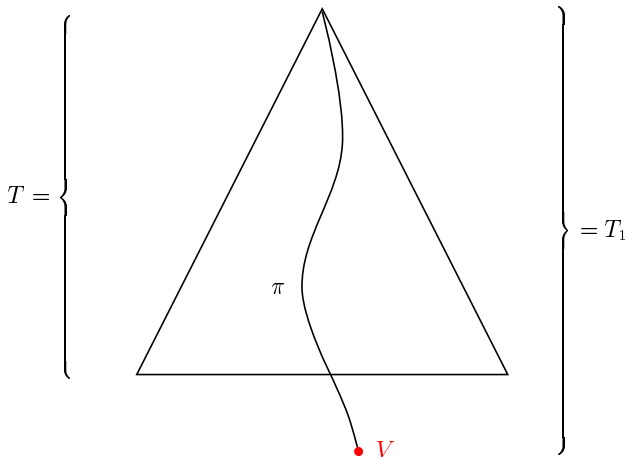
β -Erweiterung eines Tableau



β -Erweiterung eines Tableau



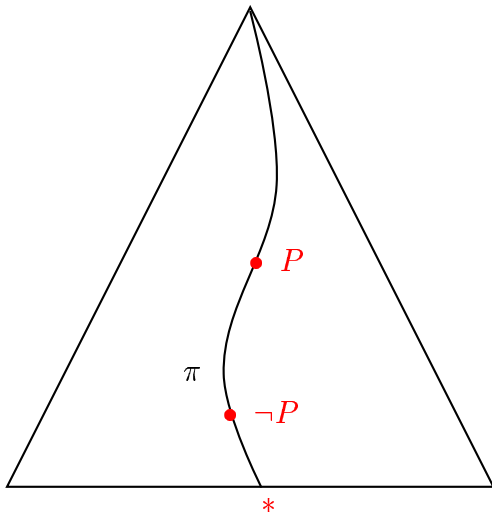
Erweiterung eines Tableau durch eine Voraussetzung



T, T_1 Tableaux für A über M und $V \in M$.



Abschluß eines Pfades



Tableaux Regeln

Kurzschreibweise

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2} \quad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$



Beispiel eines Tableau-Beweises

$$\vdash (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$



$$0(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$



$$1P \vee (Q \wedge R)$$



$$0(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



$$0(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$



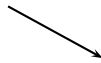
$$1P \vee (Q \wedge R)$$



$$0(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



$$1P$$



$$1(Q \wedge R)$$



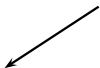
$$0(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$



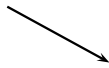
$$1P \vee (Q \wedge R)$$



$$0(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



$$1P$$



$$1(Q \wedge R)$$

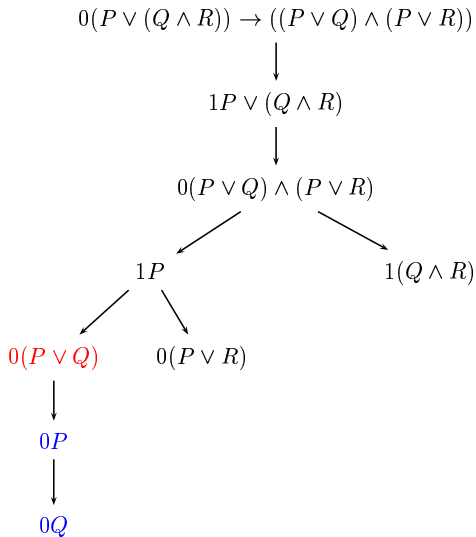


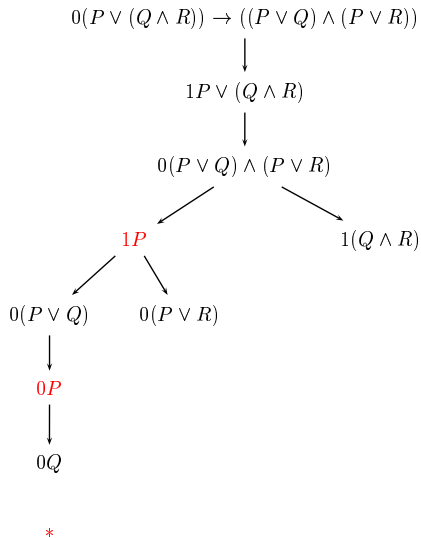
$$0(P \vee Q)$$

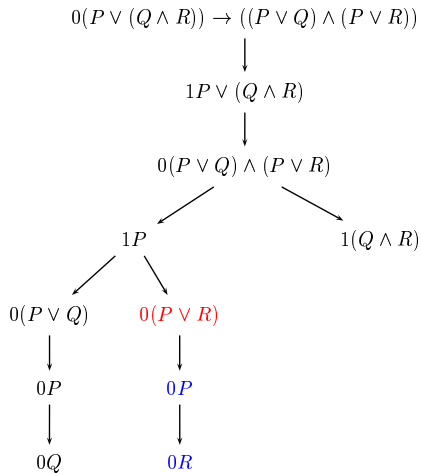


$$0(P \vee R)$$



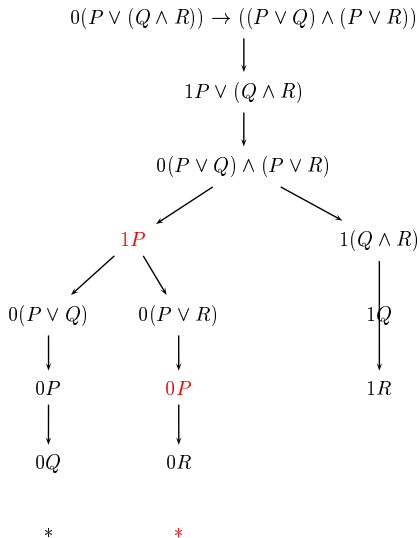


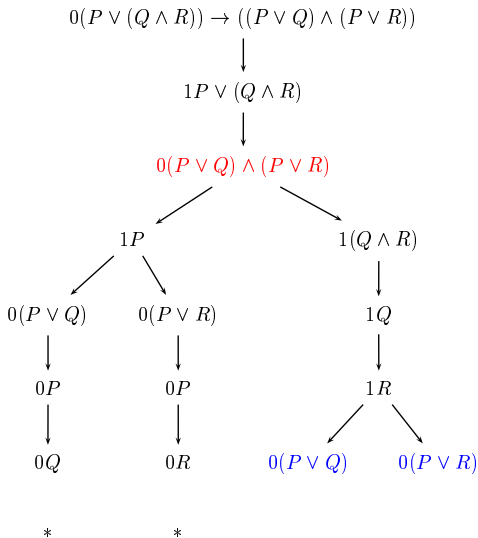


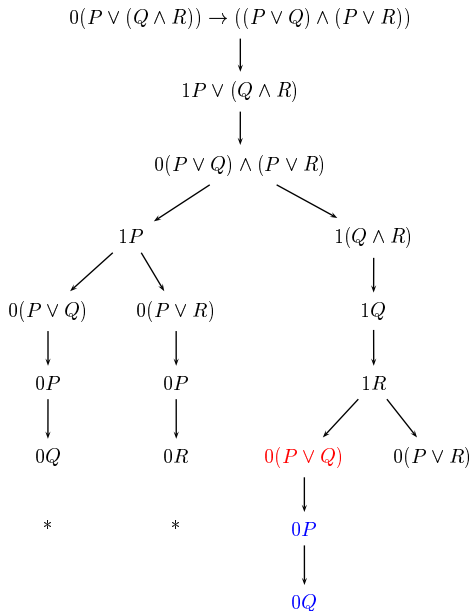


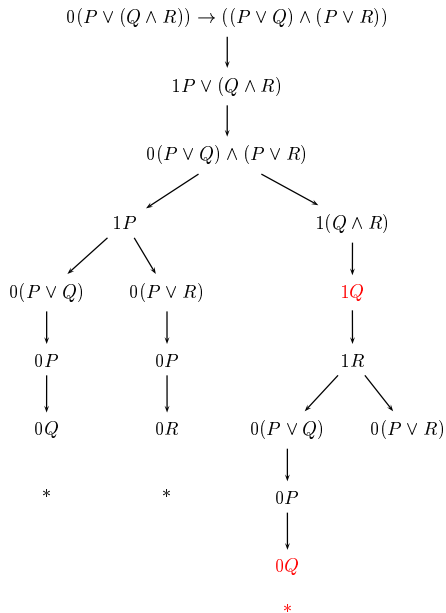
*

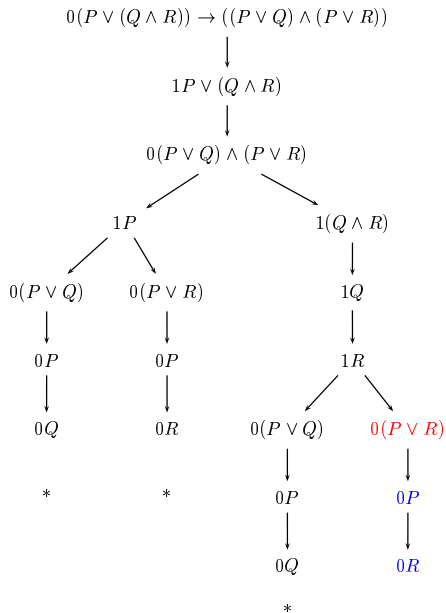


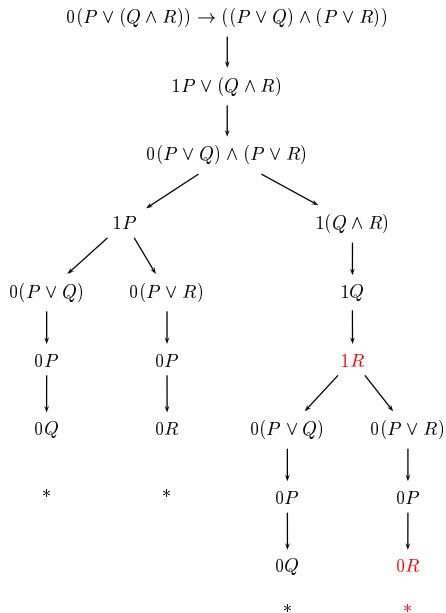












Semantik von Tableaux

Sei $I : \text{Menge der Atome} \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ eine Interpretation,
 T ein Tableau und
 π ein Pfad in T , so setzen wir

$$val_I(\pi) = W \quad :\Leftrightarrow \quad val_I(V) = W \text{ für alle } V \text{ auf } \pi$$

$$val_I(T) = W \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt einen Pfad } \pi \text{ in } T \text{ mit } val_I(\pi) = W$$

Eine Interpretation I mit $val_I(T) = W$ heißt **Modell** des Tableaus T .

Insbesondere kann ein geschlossenes Tableau kein Modell haben.



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T}_0} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T}_0} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz

- Angenommen $M \not\models A$.



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T}_0} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz

- Angenommen $M \not\models A$.
- Dann besitzt $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T}_0} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz

- Angenommen $M \not\models A$.
- Dann besitzt $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.
- Wir zeigen durch Induktion nach dem rekursiven Aufbau, dass dann jedes Tableau für A über M ein Modell hat. (Korrektheitslemma)



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T}_0} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz

- Angenommen $M \not\models A$.
- Dann besitzt $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.
- Wir zeigen durch Induktion nach dem rekursiven Aufbau, dass dann jedes Tableau für A über M ein Modell hat. (Korrektheitslemma)
- Somit kann kein solches Tableau geschlossen sein.



Korrektheitssatz

Theorem

Es seien $A \in \text{For}_{0\Sigma}$ und $M \subseteq \text{For}_{0\Sigma}$. Dann gilt

$$M \vdash_{\mathbf{T0}} A \quad \Rightarrow \quad M \models A.$$

Beweisansatz

- Angenommen $M \not\models A$.
- Dann besitzt $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.
- Wir zeigen durch Induktion nach dem rekursiven Aufbau, dass dann jedes Tableau für A über M ein Modell hat. (Korrektheitslemma)
- Somit kann kein solches Tableau geschlossen sein.
- Also $M \not\vdash_{\mathbf{T0}} A$



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.
- Zur Anwendung der α -Regel wird ein Pfad π_1 in T und eine α -Formel V auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um V_1, V_2 .



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.
- Zur Anwendung der α -Regel wird ein Pfad π_1 in T und eine α -Formel V auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um V_1, V_2 .
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, gilt für das neu entstehende Tableau T' trivialerweise $val_I(T') = W$.



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.
- Zur Anwendung der α -Regel wird ein Pfad π_1 in T und eine α -Formel V auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um V_1, V_2 .
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, gilt für das neu entstehende Tableau T' trivialerweise $val_I(T') = W$.
- Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(V) = W$, also $val_I(V_1) = W$ und $val_I(V_2) = W$.



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.
- Zur Anwendung der α -Regel wird ein Pfad π_1 in T und eine α -Formel V auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um V_1, V_2 .
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, gilt für das neu entstehende Tableau T' trivialerweise $val_I(T') = W$.
- Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(V) = W$, also $val_I(V_1) = W$ und $val_I(V_2) = W$.
- Somit $val_I(\pi_1) = W$ für den neu entstehenden Pfad π' , d.h. $val_I(T') = W$



Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $\neg A$, also von $0A$.

α -Fall:

- Nach Induktionsannahme gilt $val_I(T) = W$, es gibt also einen Pfad π in T mit $val_I(\pi) = W$.
- Zur Anwendung der α -Regel wird ein Pfad π_1 in T und eine α -Formel V auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um V_1, V_2 .
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, gilt für das neu entstehende Tableau T' trivialerweise $val_I(T') = W$.
- Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(V) = W$, also $val_I(V_1) = W$ und $val_I(V_2) = W$.
- Somit $val_I(\pi_1) = W$ für den neu entstehenden Pfad π' , d.h. $val_I(T') = W$

β -Fall: analog



Vollständigkeitslemma

Das Tableau T für A über der Formelmengen M heisst **erschöpft**, wenn auf jedem offenen Pfad π von T jede α - und β -Formel benutzt wurde und jedes $1B$, $B \in M$ auf π vorkommt.



Vollständigkeitslemma

Das Tableau T für A über der Formelmenge M heisst **erschöpft**, wenn auf jedem offenen Pfad π von T jede α - und β -Formel benutzt wurde und jedes $1B$, $B \in M$ auf π vorkommt.

Theorem (Vollständigkeitslemma)

Wenn es ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann hat $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.



Vollständigkeitslemma

Das Tableau T für A über der Formelmengende M heisst **erschöpft**, wenn auf jedem offenen Pfad π von T jede α - und β -Formel benutzt wurde und jedes $1B$, $B \in M$ auf π vorkommt.

Theorem (Vollständigkeitslemma)

Wenn es ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann hat $M \cup \{\neg A\}$ ein Modell.

Theorem (Vollständigkeitssatz)

$$M \models A \quad \Rightarrow \quad M \vdash_{\mathbf{T0}} A.$$

Folgt durch Kontraposition aus dem Vollständigkeitslemma.



Beweis des Vollständigkeitslemmas

Sei π ein offener Pfad im erschöpften Tableau T für A über M . Da T erschöpft ist, hat man

- Für jede α -Formel $V \in \pi$: $V_1 \in \pi$ und $V_2 \in \pi$
- für jede β -Formel $V \in \pi$: $V_1 \in \pi$ oder $V_2 \in \pi$
- Für jedes $B \in M$: $1B \in \pi$.



Beweis des Vollständigkeitslemmas

Sei π ein offener Pfad im erschöpften Tableau T für A über M . Da T erschöpft ist, hat man

- Für jede α -Formel $V \in \pi$: $V_1 \in \pi$ und $V_2 \in \pi$
- für jede β -Formel $V \in \pi$: $V_1 \in \pi$ oder $V_2 \in \pi$
- Für jedes $B \in M$: $1B \in \pi$.

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in \pi \\ F & \text{falls } 0P \in \pi \\ & \text{beliebig sonst} \end{cases}$$

Durch Induktion zeigt man leicht, dass $I(V) = W$ für jedes V auf π . Es folgt, dass I Modell von $M \cup \{\neg A\}$ ist.



Allgemeine Tableauregel

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,K_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

Um die Teilformeleigenschaft des Tableaukalküls zu gewährleisten, wird gefordert, dass alle Vorzeichenformeln $\psi_{i,j}$ Teilformeln der Vorzeichenformel ϕ sind.



Korrektheit und Vollständigkeit einer Regel

Eine allgemeine Tableauregel

ϕ		
$\psi_{1,1}$	$\dots$	$\psi_{n,1}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
ψ_{1,k_1}	$\dots$	ψ_{n,k_n}

heißt vollständig und korrekt, wenn für jede Interpretation I gilt
 $val_I(\phi) = W$ gdw es gibt ein i , $1 \leq i \leq n$, so dass
für alle j , $1 \leq j \leq k_i$ gilt $val_I(\psi_{i,j}) = W$



Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1



Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

$$\frac{1(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{c|c} 1A & 0A \\ 1B & 0B \end{array}}$$



Tableauregel für den logischen Äquivalenzoperator

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

$1(A \leftrightarrow B)$		$0(A \leftrightarrow B)$	
1A	0A	1A	0A
1B	0B	0B	1B

