Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 29.11.2013 besprochen.

Aufgabe 1

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so dass gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so dass gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Axiomatisiere p als strikte Halbordnung

- p ist transitiv: $\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \land p(y, z) \to p(x, z))$
- p ist irreflexiv: $\forall x \neg p(x, x)$

Also insgesamt: $F = (\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \land p(y, z) \to p(x, z))) \land (\forall x \neg p(x, x))$

(b) Die Unendlichkeit eines Modells kann erzwungen werden, wenn man im Universum eine unendlich aufsteigende Kette fordern kann.

Dies kann für eine strikte Halbordnung p durch

$$U = \forall x \exists y (p(x, y))$$

gemacht werden. Setze also

$$G = U \land F\ .$$

Sei (D, I) ein beliebiges Modell von G. Dann ist die Relation $I(p) \subseteq D \times D$ zyklenfrei. Hätte sie einen Zyklus $z_1 \xrightarrow{I(p)} z_2 \xrightarrow{I(p)} \ldots \xrightarrow{I(p)} z_r \xrightarrow{I(p)} z_1$, so würde wegen der Transitiviät auch $z_1 \xrightarrow{I(p)} z_1$ gelten und es ein Element geben, das reflexiv bzgl. $I(p)$ ist. Das widerspräche aber der axiomatisierten Irreflexitivität.

Sei (D, I) ein beliebiges Modell und $d_0 \in D$ beliebiges Element. Dann gibt es eine unendliche Kette $(d_0 \xrightarrow{I(p)} d_1 \xrightarrow{I(p)} \ldots)$ mit $d_i \in D$ und $(d_i, d_{i+1}) \in I(p)$. Die Existenz eines Nachfolgers wird durch U sichergestellt.

Da die Folge keinen Zyklus enthalten darf, müssen die d_i paarweise verschieden sein und damit die Menge D unendlich.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurden die beiden Interpretationen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ der Signatur, die $+, *$ (Funktionssymbole) und $\leq$ (Prädikatsymbol) enthält, vorgestellt.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln in $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ erfüllt sind oder nicht. Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $\forall y(\exists k_1(2 * k_1 \doteq y) \to \exists k_2(2 * k_2 \doteq y + 2))$

(b) $\forall x(0 \leq x \to x \leq x * 2)$

(c) $\exists x \forall y(x \leq y)$

Lösung zu Aufgabe 2

Mit ψ_a, ψ_b, ψ_c werden die Formeln aus der Aufgabenstellung bezeichnet.

(a) in $\mathcal{Z}$: Die Auswertung von ψ_a in $\mathcal{Z}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Ist } y \in \mathbb{Z} \text{ gerade, dann ist auch } y + 2 \text{ gerade}$$

Dies ist in $\mathbb{Z}$ erfüllt, denn aus $y = 2k$ folgt, dass $y + 2 = 2(k + 1)$ trivialerweise auch gerade ist.

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_a in $\mathcal{Z}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Gibt es für } y \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \text{ ein } k_1 \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \text{ mit } y = 2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} k_1, \text{ so gibt es für } y +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 2 \text{ ein } k_2 \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \text{ mit } y +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 2 = 2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} k_2.$$

Nach Definition[1] gilt für die Operationen in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$:

$$\begin{aligned}
2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} k_1 +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 2 &= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 *_{\mathcal{Z}} k_1) +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 2 \\
&= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 *_{\mathcal{Z}} k_1 +_{\mathcal{Z}} 2) \\
&= \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 *_{\mathcal{Z}} (k_1 +_{\mathcal{Z}} 1)) \\
&= 2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(k_1 +_{\mathcal{Z}} 1) = 2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} (k_1 +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 1)
\end{aligned}$$

Für $k_2 := k_1 +_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 1$ gilt also die Behauptung.

(b) in $\mathcal{Z}$: Die Auswertung von ψ_b in $\mathcal{Z}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Für alle } \mathbb{Z} \ni x > 0 \text{ gilt } 2 *_{\mathcal{Z}} x > x$$

Wegen der der Verträglichkeit von $*_{\mathcal{Z}}$ mit der Addition in $\mathbb{Z}$ gilt, $x +_{\mathcal{Z}} x > 0$, in $\mathcal{Z}$ gilt ψ_b damit.

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_b in $\mathcal{Z}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Für alle } \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \ni x > 0 \text{ gilt } 2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} x > x$$

Für $x = \mathsf{MAXINT}$ gilt $2 *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} x = \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2 *_{\mathcal{Z}} (2^{31} - 1)) = \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(2^{32} - 2) = -2$. Also ist $x *_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} 2 = -2 \not> x$, ψ_b ist also nicht erfüllt in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$.

[1] Dabei ist die Funktion $\text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\text{Jint}}$ gegeben durch $\text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(x) \equiv x \pmod{2^{32}}$ mit $\mathsf{MININT} \leq \text{mod}_{\mathcal{Z}_{\text{Jint}}}(x) \leq \mathsf{MAXINT}$

(c) in $\mathcal{Z}$: Die Auswertung von ψ_c in $\mathcal{Z}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Z}\text{, so dass für alle } y \in \mathbb{Z} \text{ gilt } x \leq y.$$

Zu einem beliebigen $x \in \mathbb{Z}$ ist aber $x - 1$ eine ganze Zahl und echt kleiner als x. Somit ist ψ_c in $\mathcal{Z}$ nicht erfüllt.

in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$: Die Auswertung von ψ_c in $\mathcal{Z}_{\text{Jint}}$ ergibt die Bedingung

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}}\text{, so dass für alle } y \in \mathbb{Z}_{\text{Jint}} \text{ gilt } x \leq y.$$

$x = \mathsf{MININT}$ ist ein solches minimales Element.

Aufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar oder keine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(a) $\phi_a = \exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$

(b) $\phi_b = \forall x(f(x) \doteq c) \to f(f(f(c))) \doteq c$

(c) $\phi_c = \forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$

(d) $\phi_d = \forall x((p(x) \doteq \mathbf{1} \wedge p(x) \doteq q(x)) \to q(x) \doteq \mathbf{1})$

(e) $\phi_e = ((r \to s) \to r) \to (r \to (s \to r))$

Bemerkung: p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f, g Funktionssymbole (jeweils mit der richtigen Stelligkeit), c ein Konstantensymbol (nullstelliges Funktionssymbol) und x, y sind Variablen. Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.

Lösung zu Aufgabe 3

(a)

	$\exists x \neg(\forall x(f(x) \doteq f(x)))$	$a \doteq a$ ist für jeden Term a immer wahr
$\equiv$	$\exists x \neg(\forall x(\mathbf{1}))$	die gebundene Variable x tritt nicht auf
$\equiv$	$\exists x \neg(\mathbf{1})$	die gebundene Variable x tritt nicht auf
$\equiv$	$\neg\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$	Die Formel ist also **unerfüllbar**

(b) Sei (D, I) eine beliebige Interpretation und β eine beliebige Variablenbelegung.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall x(f(x) \doteq c)) = W \\
\iff\ & \text{Für alle } d \in D \text{ gilt } \mathrm{val}_{I,\beta_x^d}(f(x) \doteq c) = W \\
\implies\ & \mathrm{val}_{I,\beta_x^{val_I(f(c))}}(f(x) \doteq c) = W \\
\iff\ & I(f)(val_{I,\beta}(f(c))) = I(c) \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\beta}(f(f(c)) \doteq c) = W
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
& \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall x(f(x) \doteq c)) = W \implies \mathrm{val}_{I,\beta}(f(f(c)) \doteq c) = W \\
\iff\ & \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi_b) = W
\end{aligned}$$

Also ist ϕ_b *allgemeingültig*. Jede allgmeingültige Formel ist aber auch insbesondere *erfüllbar*.

(c) Da in ϕ_c die gebundenen Variablen nur in jeweils einem der Operanden der Disjunktion auftreten, gilt nach Satz 4.47:

$$\phi_c \equiv (\forall x\ p(x)) \vee (\forall y\ \neg p(y)) =: \phi_c'$$

Wir zeigen zunächst die Erfüllbarkeit von ϕ'_c. Sei $D = \{d_1\}$ ein einelementiges Universum und $I(p) = \{d_1\}$. Die einzig mögliche Variablenbelegung β ist dann $\beta(v) = d_1$ für alle $v \in Var$ und damit

$$\begin{array}{ll} & d_1 \in I(p) \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(p(x)) = W \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall x\ p(x)) = W \text{ weil das die einzig mögliche Var-Belegung ist} \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall x\ p(x) \vee \forall y\ \neg p(y)) = W \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi'_c) = W \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass ϕ_c in (D, I) erfüllt ist.

Umgekehrt gilt für $D' = \{d_1, d_2\}$, $I'(p) = \{d_1\}$, und β' eine beliebige Var-Belegung, dass

$$\begin{array}{ll} & d_2 \notin I(p) \text{ und } d_1 \in I(p) \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall x\ p(x)) = F \text{ und } \mathrm{val}_{I,\beta}(\forall y\ \neg p(y)) = F \\ \Longrightarrow & \mathrm{val}_{I,\beta}(\phi'_c) = F \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass ϕ'_c in (D', I') nicht erfüllt ist. ϕ_c ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(d) Dies ist keine prädikatenlogische Formel nach unserer Definition. Links und rechts des Gleichheitszeichens $\doteq$ müssen bei uns Terme und nicht Formeln stehen. Das „Gleichheitszeichen“ für Formeln ist $\leftrightarrow$.

Bemerkung: Die modifizierte Formel $\forall x(((p(x) \leftrightarrow \mathbf{1}) \wedge (p(x) \leftrightarrow q(x))) \rightarrow (q(x) \leftrightarrow \mathbf{1}))$ ist dann allgemeingültig.

(e) Da r und s nullstellige Prädikate – also aussagenlogische Variablen – sind, handelt es sich auch um eine AL-Formel (AL ist in PL enthalten!), die z.B. mit dem AL-Sequenzenkalkül untersucht werden kann:

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright ((r \rightarrow s) \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow r)) \\ (r \rightarrow s) \rightarrow r \blacktriangleright r \rightarrow (s \rightarrow r) \\ (r \rightarrow s) \rightarrow r,\ r \blacktriangleright s \rightarrow r \\ (r \rightarrow s) \rightarrow r,\ r,\ s \blacktriangleright r \\ \text{Axiom} \end{array}$$

Dieser Beweis zeigt, dass die Formel aussagenlogisch allgemeingültig ist, also eine **Tautologie** ist. (Damit ist sie auch erfüllbar.)

Aufgabe 4

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.61 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

(a) Geben Sie (ohne Beweis) jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so dass Folgendes gilt:

(i) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist erfüllbar,

(ii) $\neg G_{\text{sko}} \wedge G$ ist unerfüllbar,

(iii) $G \rightarrow G_{\text{sko}}$ ist nicht allgemeingültig.

(b) Zeigen Sie, dass $G_{\text{sko}} \rightarrow G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) (i) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{\text{sko}} = p(c)$ und $\neg p(c) \wedge \exists x(p(x))$ ist erfüllbar.
Ein Modell ist $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$

(ii) Z.B. $G = p = G_{\text{sko}}$ (mit p 0-stelliges Prädikat). Für jede variablenfreie Formel G gilt $G = G_{\text{sko}}$, also insbondere auch $\neg G_{\text{sko}} \wedge G = \neg G \wedge G \equiv \mathbf{0}$.

(iii) $G = \exists x(p(x))$, denn $G_{sko} = p(c)$ und $G \to G_{sko} \equiv \exists x(p(x)) \to p(c)$. Die Interpretation $\mathcal{D} = (\{a, b\}, I(p) = \{a\}, I(c) = b)$ ist z. B. kein Modell von $G \to G_{\text{sko}}$.

(b) Sei G obdA in Pränexnormalform und die gebundenen Variablen verschieden. Lemma 4.36 im Skript besagt:

> Sei Σ eine Signatur, $\mathcal{D}$ eine Interpretation für Σ, β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:
>
> $$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \to \exists x A) = W$$

Sei n die Anzahl der Existenzquantoren in G. Die Formel G_{sko} wird durch n Skolemisierungsschritte aus G gewonnen. Seinen $G_0, \ldots, G_n$ die Zwischenschritte mit $G_0 = G$ und $G_n = G_{sko}$.

Betrachten wir nun den allgmeinen Schritt $G_i \rightsquigarrow G_{i+1}$ für $0 \leq i < n$.

Jedes G_i ist von der Form $G_i = \forall x_1 \ldots \forall x_{l_i} \exists x\ \varphi_i$ mit $l_i \geq 0$ voranstehenden Allquantoren für ein geeignetes φ_i.

Für G_{i+1} gilt nach der Skolemisierung von x: $G_{i+1} = \forall x_1 \ldots \forall x_{l_i}\ \sigma(\varphi_i)$ wobei $\sigma(x) = f_i(x_1, \ldots, x_{l_i})$ für eine neue Skolemfunktion f_i ist. σ entspricht auf den Variablen verschieden von x der Identität und ist wegen der Annahme über die Variablen kollisionsfrei.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.36 erfüllt und es gilt, dass $\sigma(\varphi) \to \exists x\ \varphi$ allgemeingültig ist.

Wegen (mehrfacher Anwendung) des Lemmas unten gilt auch $(G_i)_{\text{sko}} = G_{i+1} \to G_i$ ist allgemeingültig. Mit der Transitivität von $\to$ folgt: $G_n \to G_0$ ist allgemeingültig. $\square$

Lemma: Wenn $A \to B$ allgemeingültig ist, dann ist auch $\forall x\ A \to \forall x\ B$ allgemeingültig.

Beweis: Sei (D, I) eine Interpretation und β eine Variablenbelegung, $A \to B$ allgemeingültig und gelte $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ A) = W$. Dann ist zu zeigen, dass $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ B) = W$.

Es gilt, dass $\text{val}_{(I,\beta_x^d)}(A) = W$ für alle $d \in D$ und wegen der Allgemeingültigkeit von $A \to B$ damit auch $\text{val}_{(I,\beta_x^d)}(B) = W$ für alle d. Das wiederum impliziert $\text{val}_{(I,\beta)}(\forall x\ B) = W$. $\square$

Aufgabe 5

Berechnen Sie für die prädikatenlogischen Formeln (a) und (b) zunächst die Pränex-Normalform und dann die Skolem-Normalform.

(a) $(\forall x\ p(x) \to \forall x\ q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x))$

(b) $\exists x(\forall y\ p(x, y) \vee \exists z(p(x, z) \wedge \forall x\ p(z, x)))$

(c) Geben Sie eine Skolem-Normalform für (a) an, die sich von Ihrer Lösung zu (a) nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

Lösung zu Aufgabe 5

Es gilt im Allgemeinen $G \equiv G_{\text{sko}}$ **nicht**, wie uns Aufgabe 1 zeigte.

Es gibt verschiedene unterschiedliche Lösungen für diese Aufgaben, aber man sollte immer versucht sein, Skolemsymbole mit möglichst wenig Argumenten zu erzeugen, weil das nachfolgende Beweise effizienter gestalten lässt (weniger Unifikation notwendig!).

(a) Überführen in Pränex-Normalform

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x\ p(x) \to \forall x\ q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x)) & \\
\equiv & (\forall x_1\ p(x_1) \to \forall x_2\ q(x_2)) \to \forall x_3(p(x_3) \to q(x_3)) & \text{Umbenennen der gebundenen Variablen} \\
\equiv & (\forall x_2 \exists x_1 (p(x_1) \to q(x_2))) \to \forall x_3(p(x_3) \to q(x_3)) & \text{Innere Quantoren aus der Implikation ziehen} \\
 & & \text{Dabei erweist es sich als sinnvoll, } x_2 \text{ vor } x_1 \text{ zu setzen} \\
\equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \to q(x_2)) \to (p(x_3) \to q(x_3))) & \text{Alle Quantoren nach außen} \\
\equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \wedge \neg q(x_2)) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) & \text{Matrix in } \ldots \\
\equiv & \exists x_2 \forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge \ldots & \\
 & \quad \ldots \wedge (\neg q(x_2) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) & \ldots \text{KNF überführen}
\end{array}
$$

Skolemisieren: für x_2 wird eine Konstante c eingeführt.

$$\forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge (\neg q(c) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)))$$

(b) Überführen in Pränex-Normalform

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x(\forall y\ p(x,y) \vee \exists z(p(x,z) \wedge \forall x\ p(z,x))) & \\
\equiv & \exists x(\forall y\ p(x,y) \vee \exists z(p(x,z) \wedge \forall w\ p(z,w))) & \text{Umbenennen gebundener Variablen} \\
\equiv & \exists x \exists z \forall y \forall w (p(x,y) \vee (p(x,z) \wedge p(z,w))) & \text{Herausziehen der Quantoren} \\
\equiv & \exists x \exists z \forall y \forall w ((p(x,y) \vee p(x,z)) \wedge (p(x,y) \vee p(z,w))) & \text{Matrix in KNF}
\end{array}
$$

Skolemisieren: für x wird eine Konstante c eingeführt und für z die Konstante d.

$$\forall y \forall w ((p(c,y) \vee p(c,d)) \wedge (p(c,y) \vee p(d,w)))$$

(c) Nach der Umbenennung der Variablen (siehe (a)) können die Quantoren auch in anderer Reihenfolge behandelt werden:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x_1\ p(x_1) \to \forall x_2\ q(x_2)) \to \forall x_3(p(x_3) \to q(x_3)) & \\
\equiv & \forall x_3((\forall x_1\ p(x_1) \to \forall x_2\ q(x_2)) \to (p(x_3) \to q(x_3))) & \text{Ziehe } x_3 \text{ zuerst heraus} \\
\equiv & \forall x_3((\exists x_1 \forall x_2 (p(x_1) \to q(x_2))) \to (p(x_3) \to q(x_3))) & \text{Innere Quantoren aus der Implikation ziehen} \\
\equiv & \ldots & \text{s.o.} \\
\equiv & \forall x_3 \forall x_1 \exists x_2 ((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge \ldots & \\
 & \quad \ldots \wedge (\neg q(x_2) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) &
\end{array}
$$

Skolemisieren: für x_2 wird eine Funktion f eingeführt, die als Argument die freien Variablen x_3 und x_1 erhält:

$$\forall x_1 \forall x_3 ((p(x_1) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3)) \wedge (\neg q(f(x_3, x_1)) \vee \neg p(x_3) \vee q(x_3))$$

Diese Lösung ist strukturell (nicht nur durch Umbenennung!) verschieden von der Lösung in (a), weil die Skolemfunktion 2 statt keinem Argument erhält.

Aufgabe 6

Finden Sie eine Formel φ der Prädikatenlogik erster Stufe mit leeren Vokabular, so daß $M \models \varphi$ genau dann gilt, wenn M genau drei Elemente hat. Die Formel φ enthält also als einziges Relationszeichen das Symbol $\doteq$ für die Gleichheit.

Lösung zu Aufgabe 6

Vorbemerkung: Das Symbol $\models$ ist überladen: $M \models \varphi$ kann bedeuten, dass eine Formel φ logische Konsequenz einer Menge M von Formeln ist; und es kann bedeuten, dass eine Interpretation M Modell einer Formel φ ist (φ ist wahr in M). In dieser Aufgabe ist letztere Bedeutung gemeint.

Wir wollen durch eine Formel φ festlegen, dass die eine Interpretation, die Modell ist, *genau* drei Elemente hat, d.h. *wenigstens* drei und *höchstens* drei Elemente hat.

Wenigstens 3 Elemente ist äquivalent zu der Aussage: "Es gibt drei Elemente, die paarweise verschieden sind", also:

$$\varphi_{\geq 3} := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ (\neg x_1 \doteq x_2 \wedge \neg x_1 \doteq x_3 \wedge \neg x_2 \doteq x_3)$$

Höchstens 3 Elemente kann man äquivalent umformulieren zu: "Es gibt drei (möglicherweise identische) Elemente, so dass jedes Element gleich einem der drei ist", also:

$$\varphi_{\leq 3} := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y \ (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2 \vee y \doteq x_3)$$

Die Konjunktion $\varphi_{\geq 3} \wedge \varphi_{\leq 3}$ ist eine mögliche Lösung. Da die quantifizierten Variablen x_1, x_2, x_3 in beiden Formeln notwendigerweise dieselben drei Objekte beschreiben, können sie auch in eine Quantifizierung zusammengefasst werden (was ja i.A. nicht geht):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big(\neg x_1 \doteq x_2 \wedge \neg x_1 \doteq x_3 \wedge \neg x_2 \doteq x_3 \wedge \forall y (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2 \vee y \doteq x_3)\big)$$