Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

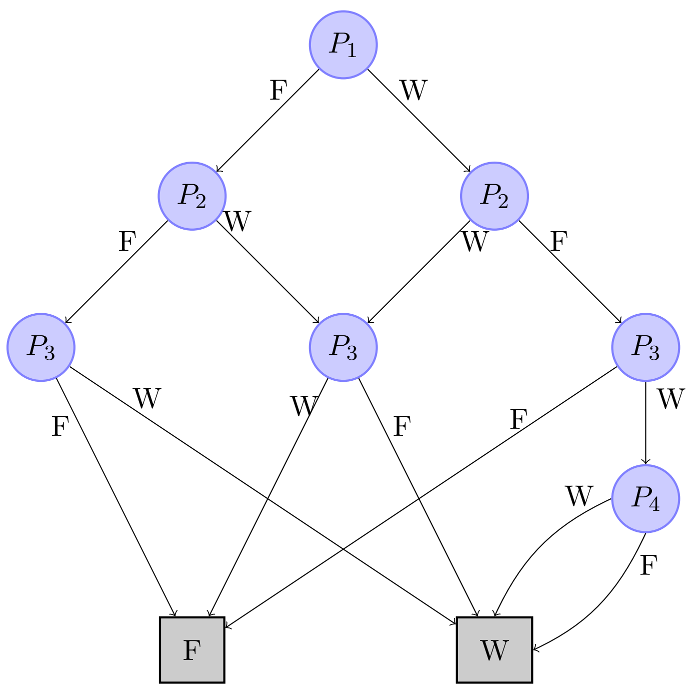
Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 15.11.2013 besprochen.

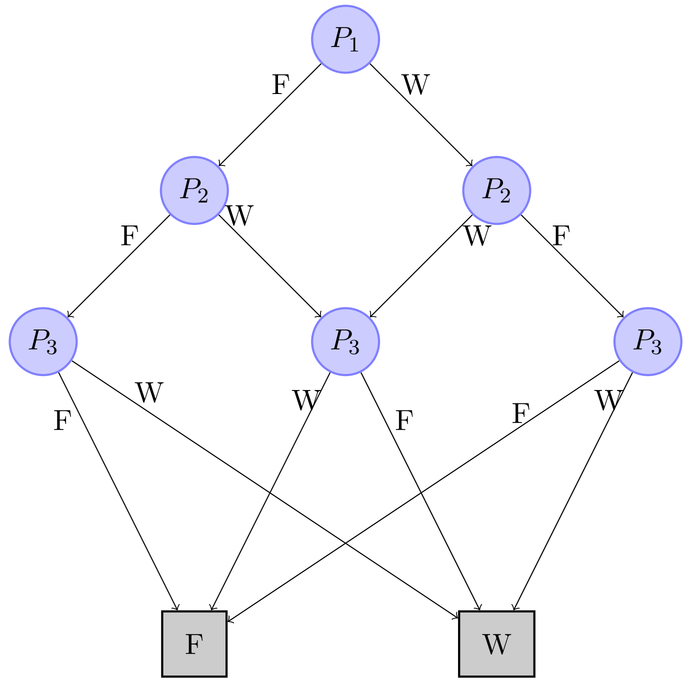
Aufgabe 1

Konstruieren Sie zu dem folgenden Shannnongraphen den reduzierten Shannongraphen (mit der gleichen Variablen-Ordnung $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$). Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie alle Zwischenschritte an, d. h. geben Sie nach jedem Reduktionsschritt den daraus resultierenden Graphen an.

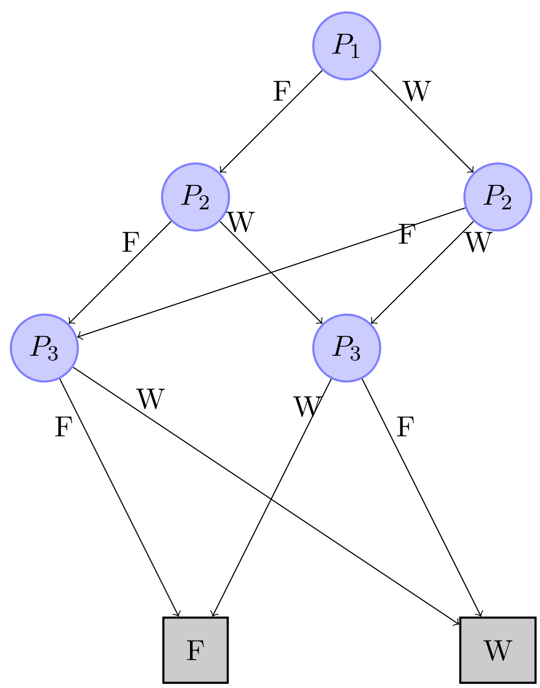


Lösung zu Aufgabe 1

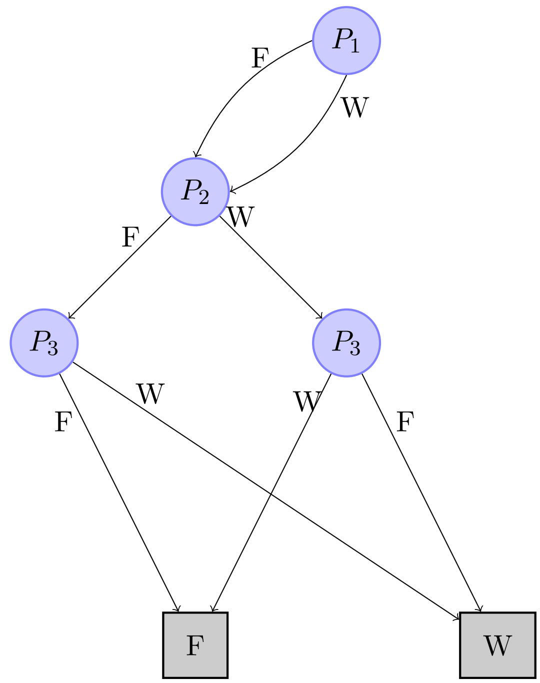
1. Schritt:



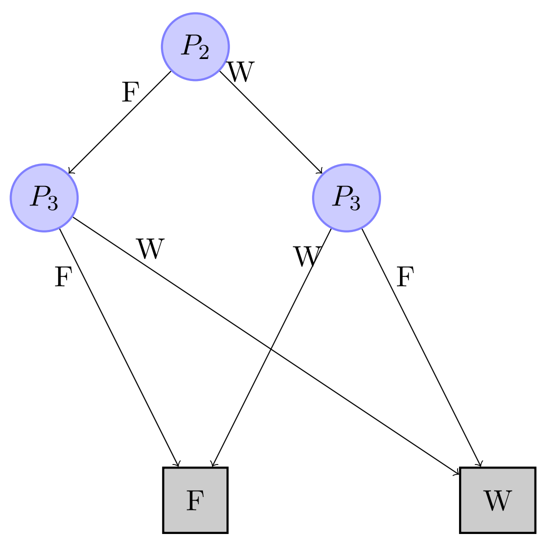
2. Schritt:



3. Schritt:



4. Schritt:



Aufgabe 2

Gegeben sei die Formel

$$F = (A \land (B \lor \neg C)) \rightarrow D$$

und die Ordnung $A < B < C < D$ auf den aussagenlogischen Variablen.

Erstellen Sie einen reduzierten Shannongraphen (BDD) für F.

Lösung zu Aufgabe 2

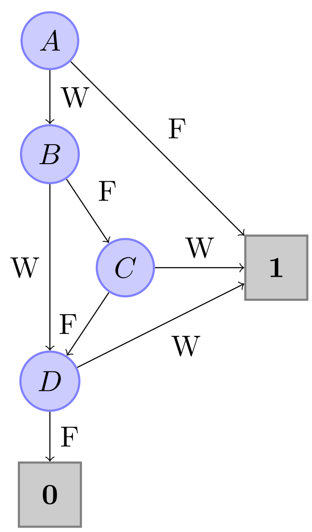


Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 2

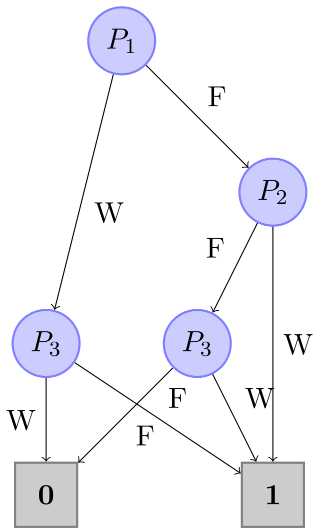
Wenn man den Graphen nach Algorithmus erstellt, erhält man zunächst 3 Knoten mit Beschriftung D, deren Untergraphen aber isomorph sind und der Graph daher auf einen mit einem solchen Knoten reduziert werden kann und muss.

Aufgabe 3

Geben Sie zu folgendem Shannongraphen je eine äquivalente aussagenlogische Formel in

(a) disjunktiver Normalform und

(b) konjunktiver Normalform an.



Lösung zu Aufgabe 3

(a) Die natürlichste DNF ist die Disjunktion aller Pfade zur **1**. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei konjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung **1** mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung **0** mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(P_1 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$$

(b) Wie so oft ist das das Duale: Die Konjunktion aller Pfade zur 0. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei disjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{0}(!)}$ mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{1}(!)}$ mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$$

Idee: Während man bei (a) alle möglichen Wege zur **1** aufzählt, stellt man in (b) Bedingungen auf, damit die **0** vermieden wird.

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe des David-Putnam-Verfahrens, dass die Klauselmenge

$$\{\ \{\neg B, C\},\quad \{\neg A, B, C\},\quad \{\neg A, B, \neg C\},\quad \{\neg B, \neg C\},\quad \{A, B, C\},\quad \{A, B, \neg C\}\ \}$$

unerfüllbar ist.

Lösung zu Aufgabe 4

Zur Wiederholung eine Kurzfassung des Davis-Putnam-Algorithmus:

if $S = \emptyset$ **then** $\mathrm{DPLL}(S) = 1;$ **stop**
if $\Box \in S$ **then** $\mathrm{DPLL}(S) = 0;$ **stop**
if S enthält Einerklausel
  then choose Einerklausel $K \in S$;
    $\mathrm{DPLL}(S) = \mathrm{DPLL}(\mathrm{red}_K(S));$
  else choose $P \in \mathrm{atom}(S)$
    $\mathrm{DPLL}(S) = \mathbf{max}\{\mathrm{DPLL}(S_P), \mathrm{DPLL}(S_{\neg P})\};$

Die Ausgangsmenge S hat keine Einerklausel, daher muss ein Literal l gewählt werden, über das die Fallunterscheidung stattfinden soll. Geschickterweise wählen wir B, damit bei diesem Schritt dann Einerklauseln entstehen.

- Fall S_B: Im zweiten Schritt wird hier die Einerklausel $\{C\}$ gewählt und wahr gemacht:

S_B		
$\{B\}$,	–	–
$\{\neg B, C\}$,	$\{C\}$	–
$\{\neg A, B, C\}$,	–	–
$\{\neg A, B, \neg C\}$,	–	–
$\{\neg B, \neg C\}$,	$\{\neg C\}$	$\Box$
$\{A, B, C\}$,	–	–
$\{A, B, \neg C\}$	–	–

  Es entsteht die leere Klausel, also ist die Menge S_B unerfüllbar.

- Fall $S_{\neg B}$: Hier gibt es für den zweiten Schritt keine Einerklauseln zum Wählen, so dass erneut eine Verzweigung (z.B. nach A) stattfinden muss. Danach entstehen dann komplementäre Einerklauseln, die wie oben aufgelöst werden.

$S_{\neg B}$		$S_{\neg B, A}$		$S_{\neg B, \neg A}$	
		$\{A\}$	–	$\{\neg A\}$	–
$\{\neg B\}$,	–	–	–	–	–
$\{\neg B, C\}$,	–	–	–	–	–
$\{\neg A, B, C\}$,	$\{\neg A, C\}$	$\{\neg A, C\}$	$\{C\}$	$\{\neg A, C\}$	–
$\{\neg A, B, \neg C\}$,	$\{\neg A, \neg C\}$	$\{\neg A, \neg C\}$	$\{\neg C\}$	$\{\neg A, \neg C\}$	–
$\{\neg B, \neg C\}$,	–	–	–	–	–
$\{A, B, C\}$,	$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	–	$\{A, C\}$	$\{C\}$
$\{A, B, \neg C\}$	$\{A, \neg C\}$	$\{A, \neg C\}$	–	$\{A, \neg C\}$	$\{\neg C\}$