Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Übungsblatt 10

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 24.01.2014 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Relation $\succ = \{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,e)\}$.

(a) Bestimmen Sie

  (i) $\rightarrow$ (die reflexive, transitive Hülle von $\succ$),

  (ii) $\xrightarrow{+}$ (die transitive Hülle von $\succ$) und

  (iii) $\leftrightarrow$ (die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von $\succ$).

(b) Zeigen Sie, daß $\succ$ lokal konfluent sowie konfluent ist.

(c) Erweitern Sie die Relation $\succ$ um ein Tupel, so daß sie zwar lokal konfluent bleibt, aber nicht mehr konfluent ist.

Aufgabe 2

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

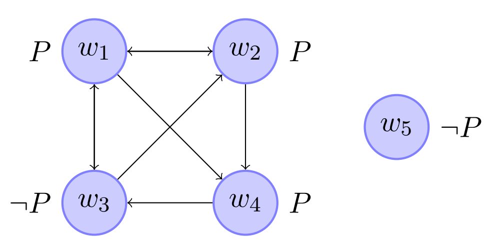
Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

(a)	Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent?	Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent?
(b)	Ist $(N, \succ)$ konfluent?	Ist $(N', \succ)$ konfluent?
(c)	Ist $(N, \succ)$ noethersch?	Ist $(N', \succ)$ noethersch?
(d)	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?	Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Aufgabe 3

Gegeben sei die modallogische Signatur, die nur das Atom P beinhaltet, sowie folgende Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, R, I)$ über dieser Signatur:



(D.h., dass $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$,

$$R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\},$$

und für die Interpretation I gilt: $I(P, w_1) = I(P, w_2) = I(P, w_4) = W,\ I(P, w_3) = I(P, w_5) = F$.)

(a) Geben Sie für jede Welt $x \in W$ eine Formel ϕ_x an, so dass für jede Welt $y \in W, x \neq y$ gilt: $val_x(\phi_x) \neq val_y(\phi_x)$.

(b) Die sogenannte *Extension* von ϕ (in der Struktur $\mathcal{K}$) ist $[\![\phi]\!] := \{w \in W \mid val_w(\phi) = W\}$.

Bestimmen Sie für die Struktur $\mathcal{K}$: $[\![\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Box P]\!]$, $[\![\Diamond\Diamond P]\!]$ und $[\![\Box\Box P]\!]$.

Aufgabe 4

Kripke-Rahmen können eine Eigenschaft aufweisen, die ähnlich zur lokalen Konfluenz bei Termersetzungssystemen ist: Ein Kripke-Rahmen ist *schwach zusammenhängend* gdw

für alle Zustände $x, y, z \in S$ gilt: falls $R(x, y)$ und $R(x, z)$, dann gibt es einen Zustand w, so dass $R(y, w)$ und $R(z, w)$.

Beweisen Sie, dass die Formel $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ die Klasse der schwach zusammenhängenden Kripke-Rahmen (S, R) charakterisiert.