Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Peter H. Schmitt
Dr. V. Klebanov, Dr. M. Ulbrich, C. Scheben

Formale Systeme, WS 2013/2014

Lösungen zu Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wurde in der Übung am 07.11.2013 besprochen.

Aufgabe 0

Melden Sie sich bei unserem Forum an (unter `http://i12www.ira.uka.de/~farago/fsforum/`) und machen sich mit den Funktionen des Forums vertraut. Im Forum können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, welche von Ihren Kommilitonen und uns gelesen und beantwortet werden. Bitte beachten Sie, das die Praxisaufgaben eigenständig bearbeitet werden müssen und in sofern insbesondere keine (Teil-)Lösungen zu den Praxisaufgaben im Forum gepostet werden dürfen.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist, indem Sie ein Modell angeben.

$$((A \to (A \wedge \neg A)) \vee (A \leftrightarrow B)) \to B$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(\neg A \wedge (A \vee \neg A)) \wedge (\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B)$$

(c) Überprüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(ii) $(A \wedge \neg A \to B) \wedge C$

Lösung zu Aufgabe 1

Diese Aufgaben lassen sich leicht durch (a) Angabe einer Wertetabelle oder (b) Transformation in Normalform mit Hilfe von Äquivalenzumformungen lösen. Man gewinnt aber mehr an Intuition, wenn man analytischer vorgeht.

(a) Wir suchen eine Interpretation, die die Formel wahr macht: Die Implikation wird unter anderem dann wahr, wenn B wahr ist, d. h. wenn $I(B) = W$ gilt. In diesem Fall beeinflusst die Wahl von A die Auswertung der Formel nicht mehr, d. h. z. B. ist $I(A) = F$ und $I(B) = W$ ein Modell der Formel.

(b) Sei I eine beliebige Interpretation.

Fall 1: Wird $(\neg A \wedge (A \vee \neg A))$ unter I zu falsch ausgewertet, so ist die ganze Aussage falsch. Wegen der Äquivalenz von $(\neg A \wedge (A \vee \neg A))$ zu $\neg A$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathrm{val}_I(A) = W$ gilt.

Fall 2: Nehmen wir an, es gelte $\mathrm{val}_I(A) = F$. Dann müssen wir zeigen, dass wenigstens $(\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B)$ unter I zu falsch auswertet. Fall 2 a: Ist $\mathrm{val}_I(B) = W$, so ist die Konjunktion falsch und die Aussage bewiesen. Fall 2 b: Sei also nun $\mathrm{val}_I(B) = F$. Dann ist $A \leftrightarrow B$ wegen $\mathrm{val}_I(A) = F$ wahr, also $\neg(A \leftrightarrow B)$ falsch und somit $(\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg B)$ falsch.

(c) (i) Wir zeigen, dass $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ eine Tautologie ist.
Fall 1: Ist die Prämisse $(A \to B)$ falsch, dann ist die Formal insgesamt wahr.
Fall 2: Sei also $A \to B$ wahr. Nun gilt es, zu zeigen, dass $(B \to C) \to (A \to C)$ auch wahr ist. Dies ist trivial gegeben, wenn (Fall 2 a) $B \to C$ falsch ist. Fall 2 b: Sei also $B \to C$ wahr. Dann folgt – wegen der Transitivität der Implikation – aus $A \to B$ und $B \to C$, dass auch $A \to C$ wahr ist.
Interessant ist es hier zu beobachten, dass diese Implikation in gewisser Weise „kontravariant“ ist, d.h., dass A aus der Prämisse in die Konklusio wandert und B umgekehrt.

(ii) Interpretationen I mit $I(C) = F$ erfüllen $(A \wedge \neg A \to B) \wedge C$ nicht. Daher ist diese Aussage keine Tautologie.

Aufgabe 2

Geben Sie zwei Formeln A und B so an, dass $A \to B$ eine Tautologie ist und dass es mindestens zwei verschiedene Interpolanten für $A \to B$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel zwei verschiedene Interpolanten an und zeigen Sie, dass diese tatsächlich Interpolanten von $A \to B$ sind.

Lösung zu Aufgabe 2

Seien $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ und $B \equiv P_1 \vee P_2 \vee P_4$.

Zunächst zeigen wir: $A \to B$ ist eine Tautologie. Für $\mathrm{val}_I(P_1) = F$ ist $\mathrm{val}_I(A) = F$ und damit die Implikation trivialer Weise erfüllt. Für $\mathrm{val}_I(P_1) = W$ ist anderseits $\mathrm{val}_I(B) = W$ und damit die Implikation ebenfalls erfüllt.

Die Argumentation zeigt eigentlich schon: P_1 ist eine Interpolante für $A \to B$, denn

- P_1 ist in A und B enthalten und
- offensichtlich gilt sowohl $A \to P_1$ als auch $P_1 \to B$.

Aus dem selben Grund ist aber auch P_2 eine Interpolante. $P_1 \wedge P_2$ und $P_1 \vee P_2$ sind weitere Interpolanten.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

Sind C_1 und C_2 Interpolanten für die Implikation $A \to B$, dann sind auch $C_1 \vee C_2$ und $C_1 \wedge C_2$ Interpolanten für $A \to B$.

Lösung zu Aufgabe 3

Seien C_1 und C_2 Interpolanten der Tautologie $A \to B$. Es gilt:

- $A \to C_1$ und
- $A \to C_2$, weil C_i Interpolaten sind, und
- $C_1 \to (C_1 \vee C_2)$, weil es eine AL-Tautologie ist.

Aus den ersten beiden Aussagen folgt bereits $A \to (C_1 \wedge C_2)$ und aus der ersten und dritten schon $A \to (C_1 \vee C_2)$. Die beiden anderen Aussagen folgen ziemlich analog aus:

- $C_1 \to B$,
- $C_2 \to B$ und
- $(C_1 \wedge C_2) \to C_1$.

Aus den ersten beiden folgt $(C_1 \vee C_2) \to B$ und aus dem ersten und dritten $(C_1 \wedge C_2) \to B$.

Offensichtlich kommt jede aussagenlogische Variable in $C_1 \wedge C_2$ und $C_2 \vee C_1$ sowohl in A als auch in B vor.

Aufgabe 4

Sei $A \to B$ eine Tautologie.
Seien $Q_1, \ldots, Q_k$ alle Variablen in B, die nicht in A vorkommen. Sind c_i Konstanten aus $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ dann bezeichne $B[c_1, \ldots, c_k]$, wie im Beweis von Lemma 2.22 aus dem Skriptum, die Formel, die aus B entsteht, wenn man alle Vorkommen von Q_i durch c_i ersetzt. Außerdem sei:

$$D \equiv \bigwedge_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} B[c_1, \ldots, c_n]$$

Zeigen Sie, daß D eine Interpolante von $A \to B$ ist.

Lösung zu Aufgabe 4

Offensichtlich kommt jede aussagenlogische Variable in D sowohl in A als auch in B vor.

Wir betrachten eine Interpretation I mit $val_I(A) = W$. Wir zielen darauf $val_I(D) = W$ zu zeigen. Seien, wie gesagt, $Q_1, \ldots, Q_k$ alle Variablen in B, die nicht in A vorkommen. Weiterhin seien $c_1, \ldots, c_k$ Konstanten aus $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ und J die Belegung mit

$$J(Q) = \begin{cases} val_I(c_i) & \text{falls } Q = Q_i \text{ für } 1 \leq i \leq k \\ I(Q) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt weiterhin $val_J(A) = W$, da ja nur die Belegung von Aussagenvariablen geändert wurden, die nicht in A vorkommen. Da $A \to B$ eine Tautologie ist gilt auch $val_J(B) = W$. Das läßt sich äquivalent auch schreiben als $val_I(B[c_1, \ldots, c_k]) = W$. Wiederholt man dieses Argument für jedes k-Tupel $(c_1, \ldots, c_k) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}^k$ dann erhält man.

$$val_I(\bigwedge_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} B[c_1, \ldots, c_n]) = val_I(D) = W$$

Damit ist schon einmal $val_I(A \to D) = W$ gezeigt für beliebiges I.

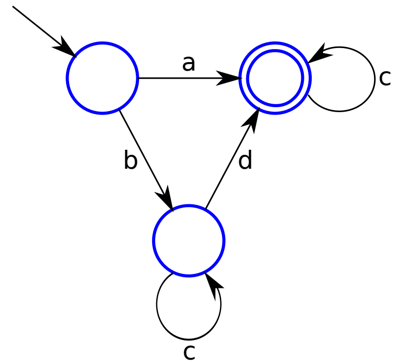
Gelte jetzt $val_I(D) = W$. Dann gilt für insbesondere für $c_i = \mathbf{1} \Leftrightarrow I(Q_i) = W$, $1 \leq i \leq k$, auch $val_I(B[c_1, \ldots, c_n]) = W$, denn $B[c_1, \ldots, c_n]$ ist ja konjunktiver Bestandteil von D. In diesem Fall gilt aber auch

$$val_I(B) = val_I(B[c_1, \ldots, c_n]) = W.$$

Damit ist auch die Allgemeingültigkeit von $D \to B$ gezeigt.

Aufgabe 5

Geben sei nebenstehender Automat.



Die Zustände in diesem Automaten sind aussagenlogische Interpretationen über der Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$. Die Zustandsübergänge des Automaten sind mit Aktionen a, b, c und d annotiert, welche beschreiben, wie sich eine Interpretation beim Übergang von einem Zustand in den nächsten ändert. Für unseren Automaten sind die Aktionen folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
a &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(\neg P_2), I'(P_3) = I(P_3)\\
b &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(\neg P_2), I'(P_3) = I(\neg P_3)\\
c &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(P_2), I'(P_3) = I(P_3)\\
d &: I \mapsto I' \text{ mit } I'(P_1) = I(P_1), I'(P_2) = I(P_2), I'(P_3) = I(\neg P_3)
\end{aligned}
$$

Für jede Aktion definieren wir eine Formel, die den jeweiligen Zustandsübergang beschreibt. Dazu führen wir zu jeder aussagenlogischen Variable P_i eine gestrichene Version P_i' ein, welche den Wert von P_i im Folgezustand beschreibt:

$$
\begin{aligned}
f_a(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow \neg P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow P_3\\
f_b(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow \neg P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow \neg P_3\\
f_c(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow P_3\\
f_d(P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3') &\equiv P_1' \leftrightarrow P_1 \wedge P_2' \leftrightarrow P_2 \wedge P_3' \leftrightarrow \neg P_3
\end{aligned}
$$

Gelte nun im Startzustand $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$.

(a) Geben Sie eine Formel an, die beschreibt, welche Zustände nach zwei Schritten erreicht werden können.

(b) Zeigen Sie, dass in allen Zuständen, die nach zwei Schritten erreicht werden können, $P_1 \wedge \neg P_2$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Neben den Variablen P_1, P_2, P_3, die wir zur Beschreibung des Startzustandes verwenden, führen wir zwei weitere Mengen von Variablen P_1', P_2', P_3' und P_1'', P_2'', P_3'' ein, die wir zur Beschreibung des zweiten und dritten Zustandes verwenden. Sei $\bar{P}$ Abkürzung für P_1, P_2, P_3, sowie $\bar{P}'$ Abkürzung für P_1', P_2', P_3' und $\bar{P}''$ Abkürzung für P_1'', P_2'', P_3''. Dann beschreibt folgende Formel die Zustände, die nach zwei Schritten aus dem Startzustand mit $\mathrm{val}_I(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) = W$ erreicht werden können:

$$
\begin{aligned}
A \;=\; P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \;\; (\;\; & (f_a(\bar{P}, \bar{P}') \wedge f_c(\bar{P}', \bar{P}''))\\
& \quad \vee\\
& (f_b(\bar{P}, \bar{P}') \wedge (f_c(\bar{P}', \bar{P}'') \vee f_d(\bar{P}', \bar{P}'')))\\
)\;\; &
\end{aligned}
$$

(b) Zu zeigen ist: $A \rightarrow (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ ist allgemeingültig.

Zunächst berechnen wir die Interpolante C für $A \rightarrow (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ nach der Konstruktion aus der Vorlesung. Wir wissen zu diesem Zeitpunkt zwar nicht, ob $A \rightarrow (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ eine Tautologie ist, allerdings gilt $A \rightarrow C$ auf jeden Fall, wegen der Konstruktion von C. Wenn wir im Anschluss noch $C \rightarrow (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ zeigen können, dann haben wir insgesamt die Allgemeingültigkeit von $A \rightarrow (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ gezeigt.

(i) Konstruktion von C.

Nach Vorlesung kann C über

$$C = \bigvee_{\bar{c} \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^7} A[\bar{c}] \tag{1}$$

konstruiert werden, wobei in $A[\bar{c}]$ die Atome $P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3', P_3''$, die in A aber nicht in $(P_1'' \wedge \neg P_2'')$ vorkommen durch $c_1, \ldots, c_7$ ersetzt werden.

Die Berechnung von C läßt sich manuell nur handhaben, wenn wir systematische vorgehen und schon während der schrittweisen Berechnung logische Äquivalenz erhaltende Vereinfachungen vornehmen.

Wählen wir für c_1, c_2 oder c_3 den Wert $\mathbf{0}$, so ist $A[\bar{c}] \leftrightarrow \mathbf{0}$ und trägt nichts zu C bei. Diese Beobachtung führt zu

$$C \equiv \bigvee_{\bar{c_0} \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^4} A[1,1,1,\bar{c_0}] \tag{2}$$

Führen wir die Ersetzungen $P_i \rightsquigarrow 1$ für $1 \leq i \leq 3$ in A aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_0 \quad = \quad & (P_1' \wedge \neg P_2' \wedge P_3' \wedge f_c(\bar{P}', \bar{P}'')) \\ & \vee \\ & (P_1' \wedge \neg P_2' \wedge \neg P_3' \wedge (f_c(\bar{P}', \bar{P}'') \vee f_d(\bar{P}', \bar{P}''))) \end{aligned} \tag{3}$$

Somit kann man (2) schreiben als:

$$C \equiv \bigvee_{\bar{c_0} \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^4} A_0[\bar{c_0}] \tag{4}$$

Wir sehen, dass für $c_4 = \mathbf{0}$ oder $c_5 = \mathbf{1}$ wiederum $A_0[\bar{c_0}] \leftrightarrow \mathbf{0}$ gilt und somit zur Disjunktion C nichts beiträgt.

$$C \equiv \bigvee_{\bar{c_1} \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^2} A_0[1,0,\bar{c_1}] \tag{5}$$

Führen wir die Ersetzungen $P_1' \rightsquigarrow \mathbf{1}$, $P_2' \rightsquigarrow \mathbf{0}$ in A_0 aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 \quad = \quad & (P_3' \wedge P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'') \\ & \vee \\ & (\neg P_3' \wedge (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'') \vee (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge \neg P_3'')) \end{aligned} \tag{6}$$

Somit können wir wieder (4) umschreiben zu:

$$C \equiv \bigvee_{\bar{c_1} \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^2} A_1[\bar{c_1}] \tag{7}$$

Die Formeln sind jetzt klein genug, daß wir das Ergebnis der Ersetzungen $P_3' \rightsquigarrow \mathbf{1}$ und $P_3' \rightsquigarrow \mathbf{0}$ direkt ausrechnen können. Das führt zu

$$C \equiv \bigvee_{d \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}} (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'')[d] \vee \bigvee_{d \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}} (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'') \vee (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge \neg P_3''))[d] \tag{8}$$

wobei die einzige noch verbleibende Ersetzung $P_3'' \rightsquigarrow d$ ist. Die Formel in der zweiten großen Disjunktion lässt sich mit Hilfe des Distributivgesetzes vereinfachen zu

$$\begin{aligned} (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'') \vee (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge \neg P_3'') \quad & \equiv \quad (P_1'' \wedge \neg P_2'') \wedge (P_3'' \vee \neg P_3'') \\ & \equiv \quad (P_1'' \wedge \neg P_2'') \end{aligned}$$

Eingesetzt in (8) erhält man

$$C \equiv \Big(\bigvee_{d \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}} (P_1'' \wedge \neg P_2'' \wedge P_3'')[d] \Big) \vee (P_1'' \wedge \neg P_2'') \tag{9}$$

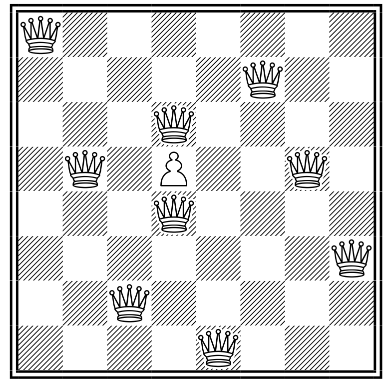
In der zweiten Disjunktion kann die Ersetzung durch d wegfallen, da P_3'' nicht mehr vorkommt. In der ersten Disjunktion liefert $P_3'' \rightsquigarrow \mathbf{0}$ keinen Beitrag und es bleibt

$$\begin{aligned} C &\equiv (P_1'' \wedge \neg P_2'') \vee (P_1'' \wedge \neg P_2'') \\ &\equiv (P_1'' \wedge \neg P_2'') \end{aligned} \tag{10}$$

(ii) Wie eingangs schon angedeutet ist $A \to C$ nach Konstruktion eine Tautologie. Wegen (10) ist $C \to (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ trivialer Weise eine Tautologie. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $A \to (P_1'' \wedge \neg P_2'')$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 6

Eine Abwandlung des sogenannten *8-Damen-Problems* (siehe Skriptum) ist das *9-Damen-Problem*: Es geht darum, neun Damen so auf einem üblichen Schachbrett zu plazieren, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Bei 9 Damen ist dies jedoch nur möglich, wenn sich zusätzlich ein Bauer auf dem Brett befindet. Steht der Bauer auf gerader Linie zwischen zwei Damen, so bedrohen sich diese nicht. Eine mögliche Lösung des Problems zeigt die Abb. rechts.



Formalisieren Sie das 9-Damen-Problem als ein Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Orientieren Sie sich dabei an der Lösung des 8-Damen-Problems aus dem Skriptum.

Lösung zu Aufgabe 6

Wir führen für jedes Feld des Schachbretts eine Boolesche Variable $D_{i,j}$ ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}$ genau dann den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i,j) eine Dame steht. Zusätzlich führen wir für jedes Feld des Schachbretts eine Boolesche Variable $B_{i,j}$ ein, mit der Vorstellung, dass $B_{i,j}$ genau dann den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i,j) der Bauer steht.

Schreibweise. Im folgenden schreiben wir

$$\bigwedge_{i:b(i)} \phi(i)$$

als Abkürzung für eine endliche Konjunktion der aussagenlogischen Formeln $\phi(i)$, für die gilt, dass

- $1 \leq i \leq 8$,
- die Bedingung $b(i)$ ist erfüllt.

Dabei ist i eine Variable auf der Metaebene, und b ist eine Formel der Metaebene.

Zudem steht $\bigvee_i \phi(i)$ für $\bigvee_{i:true} \phi(i)$; $\bigvee_{i:false}$ steht für *false*; $\bigwedge_{i:false}$ steht für *true*; und Abkürzungen wie $\bigvee_{i,j:b(i,j)} \phi(i,j)$ mit mehreren Variablen sind analog definiert.

Struktur der Formalisierung. Wir formalisieren das Problem als eine aussagenlogische Formel

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

Die drei Teilformeln sind jeweils wie folgend.

Genau ein Bauer steht auf dem Brett.

$$A_1 = \bigvee_{x,y} \left(B_{x,y} \wedge \bigwedge_{i,j:(i,j)\neq(x,y)} \neg B_{i,j} \right)$$

Genau neun Damen stehen auf dem Brett. Sei

$$M = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 8\}$$

die Menge aller Felder des Bretts. Damit kodiert folgende Formel die Tatsache, dass es genau 9 Damen auf dem Brett gibt:

$$A_2 = \bigvee_{S:S\subset M,\#S=9} \left(\bigwedge_{i,j:(i,j)\in S} D_{i,j} \wedge \bigwedge_{i,j:(i,j)\notin S} \neg D_{i,j} \right)$$

(Wir haben dabei die Schreibweise der endlichen Disjuktion auf eine naheliegende Weise „mißbraucht“.)

Auf keinem Feld stehen Bauer und Dame zugleich.

$$A_4 = \bigwedge_{i,j} \neg(B_{i,j} \wedge D_{i,j})$$

Es gibt keine Bedrohung zwischen zwei Damen. Wir ordnen die Bedrohungen nach Reihen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonalen:

$$A_3 = \mathit{Reihen} \wedge \mathit{Spalten} \wedge \mathit{Diag}^+ \wedge \mathit{Diag}^-$$

Die folgende Formel besagt, dass, falls zwei Damen in der gleichen Reihe stehen, der Bauer dazwischen stehen muss:

$$\mathit{Reihen} = \bigwedge_{i,i',j:\,i<i'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j}) \to \bigvee_{i'':\,i<i''<i'} B_{i'',j} \right)$$

Das gleiche für Spalten, Haupt- und Nebendiagonalen:

$$\begin{aligned}
\mathit{Spalten} &= \bigwedge_{i,j,j':\,j<j'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i,j'}) \to \bigvee_{j'':\,j<j''<j'} B_{i,j''} \right) \\
\mathit{Diag}^+ &= \bigwedge_{i,j,i',j':\,i<i',\,i'-i=j'-j} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j'}) \to \bigvee_{i'',j'':\,i<i''<i',\,i''-i=j''-j} B_{i'',j''} \right) \\
\mathit{Diag}^- &= \bigwedge_{i,j,i',j':\,i<i',\,i'-i=j-j'} \left((D_{i,j} \wedge D_{i',j'}) \to \bigvee_{i'',j'':\,i<i''<i',\,i''-i=j-j''} B_{i'',j''} \right)
\end{aligned}$$

Fazit. Insgesamt hat das 9-Damen-Problem eine Lösung, wenn die aussagenlogische Formel

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

erfüllbar ist. Jedes Modell der Formel ergibt eine zulässige Konfiguration der Figuren auf dem Brett.