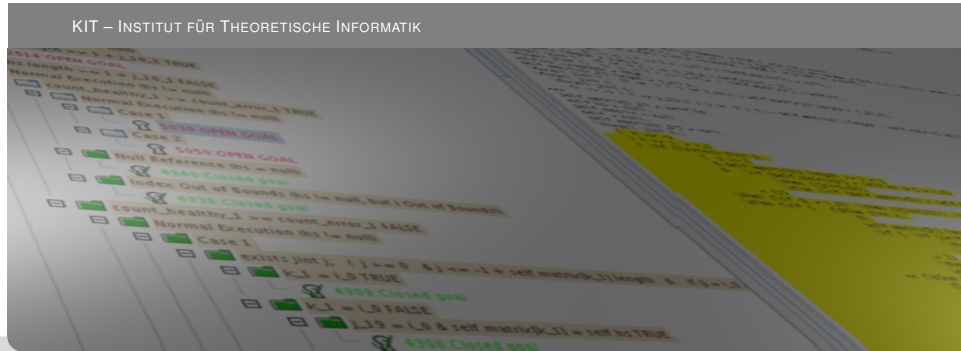


Formale Systeme

LTL und Büchi-Automaten
Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Definition

Eine **omega-Struktur** $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

Für einen Automaten $\mathcal{B} = (S, V, s_0, \delta, F)$ mit

$$V = 2^\Sigma, \quad \text{wobei}$$

$\Sigma =$ Menge aussagenlogischer Atome,

können wir

- ▶ Omega-Strukturen ξ über Σ und
- ▶ unendliche Wörter $w \in V^\omega$ über V

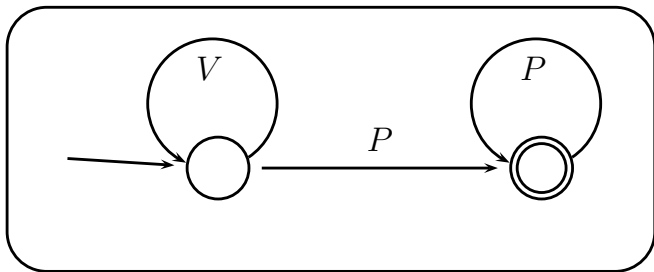
identifizieren.

Für die folgenden drei Beispiele vereinbaren wir die folgende Notation

- ▶ eine aussagenlogische Signatur Σ mit $p, q \in \Sigma$
- ▶ $V = 2^\Sigma$
- ▶ $P = \{b \in V \mid p \in b\}$
- ▶ $Q = \{b \in V \mid q \in b\}$

Automat für $\diamond\Box p$

Für den Automaten \mathcal{A}_{dbp}

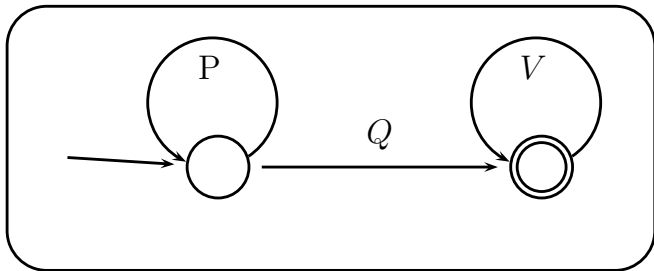


gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{dbp}) \Leftrightarrow \xi \models \diamond\Box p$$

Automat für $p \mathbf{U} q$

Für den Automaten $\mathcal{A}_{puntilq}$

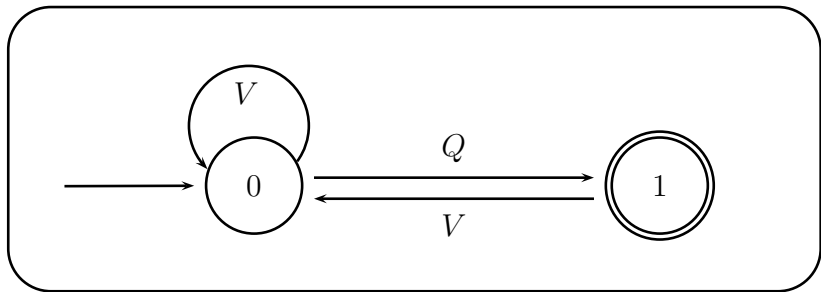


gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{puntilq}) \Leftrightarrow \xi \models p \mathbf{U} q$$

Automat für $\square\diamond q$

Für den Automaten \mathcal{A}_{infq}



gilt

$$\xi \in L^\omega(\mathcal{A}_{infq}) \Leftrightarrow \xi \models \square\diamond q$$

Lemma

Automat für Konjunktion

Seien

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= (S_1, V, s_1^0, \delta_1, F_1), \\ \mathcal{A}_2 &= (S_2, V, s_2^0, \delta_2, F_2)\end{aligned}$$

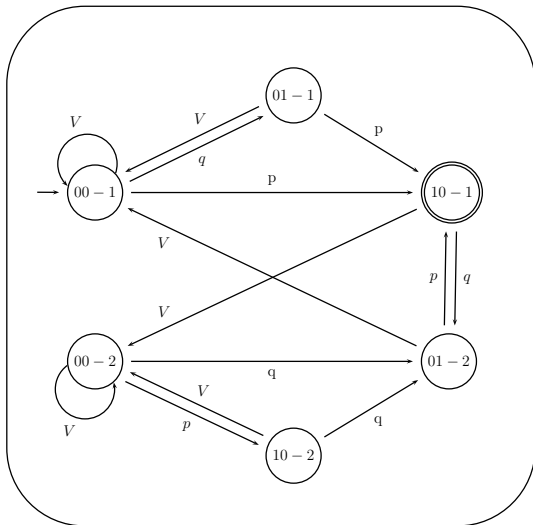
Büchi-Automaten,
 C_1, C_2 LTL-Formeln mit

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\models C_1 \\ \mathcal{A}_2 &\models C_2\end{aligned}$$

Dann gibt es einen Büchi-Automaten \mathcal{C} mit

$$\mathcal{C} \models C_1 \wedge C_2$$

Automat für $\square\diamond p \wedge \square\diamond q$



Allgemeine Konstruktion für Konjunktionsautomaten

Gegeben $\mathcal{A}_i = (S_i, s_i^0, \delta_i, F_i)$

Gesucht $\mathcal{C} = (S, s^0, \delta, F)$ mit $L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A}_1) \cap L^\omega(\mathcal{A}_2)$.

$$S = S_1 \times S_2 \times \{1, 2\}$$

$$s^0 = (s_1^0, s_2^0, 1)$$

$$F = F_1 \times S_2 \times \{1\}$$

falls $s_1 \in F_1$ und $i = 1$

$$(t_1, t_2, 2) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

falls $s_2 \in F_2$ und $i = 2$

$$(t_1, t_2, 1) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

sonst

$$(t_1, t_2, i) \in \delta((s_1, s_2, i), a) \Leftrightarrow i \in \{1, 2\}, \\ t_1 \in \delta_1(s_1, a) \text{ und } t_2 \in \delta_2(s_2, a)$$

Zu jeder LTL-Formel

$$B$$

gibt es einen – effektiv konstruierbaren – Büchi-Automaten

$$\mathcal{A}_B$$

mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$$

Beweis: Konstruktion folgt
Weitere Details im Skriptum.

Beweis

Konstruktion

Gegeben: LTL-Formel B

P Menge der AL-Atome, B in Negationsnormalform

nur: $\neg, \wedge, \vee, \mathbf{U}, \mathbf{V}, X$ in B

Gesucht: Büchi-Automat $\mathcal{A}_B = (V, S, S_0, \delta, \mathcal{F})$

$$V = 2^P$$

$subF(B)$ sei die Menge aller Teilformeln von B

$$S = \{s \subseteq subF(B) \mid \mathbf{0} \notin s, \mathbf{1} \in s$$

$$\text{wenn } (C_1 \wedge C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ und } C_2 \in s$$

$$\text{wenn } (C_1 \vee C_2) \in s \text{ dann } C_1 \in s \text{ oder } C_2 \in s \}$$

$$S_0 = \{s \in S \mid B \in s\}$$

$E_i = A_i \mathbf{U} B_i$ für $1 \leq i \leq k$ alle Fmln der Form $A \mathbf{U} B$ in $subF(B)$.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k\}$ mit

$$\mathcal{F}_i = \{s \in S \mid E_i \notin s \text{ oder } E_i \in s \text{ und } B_i \in s\}$$

Konstruktion

Die Übergangsfunktion δ

Für $s, t \in S$ und $a \in 2^P$ gilt $t \in \delta(s, a)$ wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für alle $p \in P$ mit $p \in s$ gilt $p \in a$.
2. Für alle $p \in P$ mit $\neg p \in s$ gilt $p \notin a$.
3. Falls $X \ A \in s$ dann $A \in t$.
4. Falls $A \ \mathbf{U} \ B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder ($A \in s$ und $A \ \mathbf{U} \ B \in t$).
5. Falls $A \ \mathbf{V} \ B \in s$, dann ($B \in s$ und $A \in s$) oder ($B \in s$ und $A \ \mathbf{V} \ B \in t$).

$$B = \diamond \square p$$

$$B = 1 \mathbf{U} \square p$$

$$B = 1 \mathbf{U} \neg(\neg 0 \mathbf{U} \neg p)$$

$$B = 1 \mathbf{U} (0 \mathbf{V} p)$$

$$V = \{\{p\} \equiv p, \quad \{\} \equiv \neg p\}$$

$$\text{subFml}(B) = \{B, B_0 = 0 \mathbf{V} p, p, \quad \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$$

$$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\} \{B, p\} \{B_0, p\}\}$$

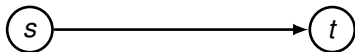
$$E_1 = 1 \mathbf{U} B_0 \text{ i.e. } A_1 = \mathbf{1}, B_1 = B_0$$

$$\mathcal{F} = \{F_1\}$$

$$F_1 = \{\{B_0\}, \{p\}, \{B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, B_0, p\}\}$$

Beispiel

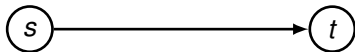
Übergangsfunktion



4. Falls $A \mathbf{U} B \in s$, dann gilt $B \in s$ oder ($A \in s$ und $A \mathbf{U} B \in t$).
5. Falls $A \mathbf{V} B \in s$, dann ($B \in s$ und $A \in s$) oder ($B \in s$ und $A \mathbf{V} B \in t$).
4. Falls $1 \mathbf{U} B_0 \in s$, dann gilt $B_0 \in s$ oder ($1 \in s$ und $1 \mathbf{U} B_0 \in t$).
5. Falls $0 \mathbf{V} p \in s$, dann ($p \in s$ und $0 \in s$) oder ($p \in s$ und $0 \mathbf{V} p \in t$).
4. Falls $B \in s$, dann gilt $B_0 \in s$ oder $B \in t$.
5. Falls $B_0 \in s$, dann ($p \in s$ und $B_0 \in t$).

Beispiel

Übergangsfunktion



$B \in s, B_0 \notin s$

$B \in s, B_0 \in s$

$B_0 \in s, p \in s$

$B_0 \in s, p \notin s$

$B \in t$

keine Einschränkung

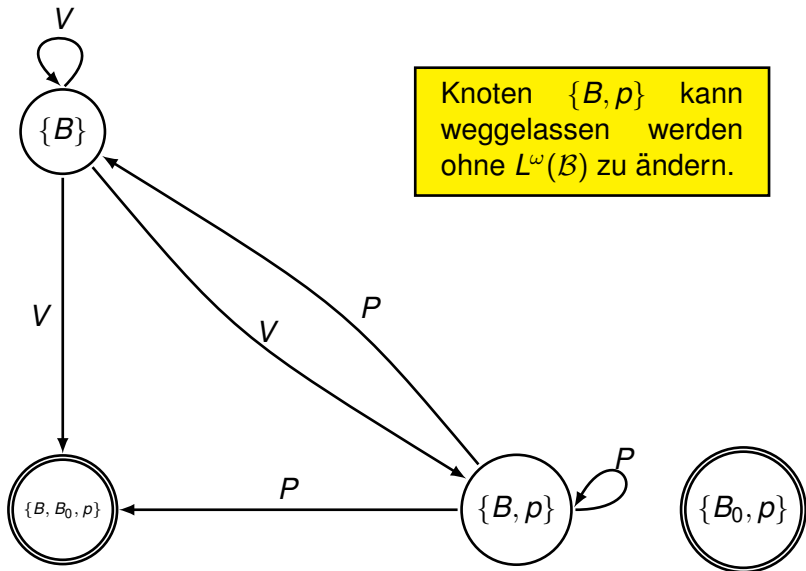
$B_0 \in t$

nicht möglich

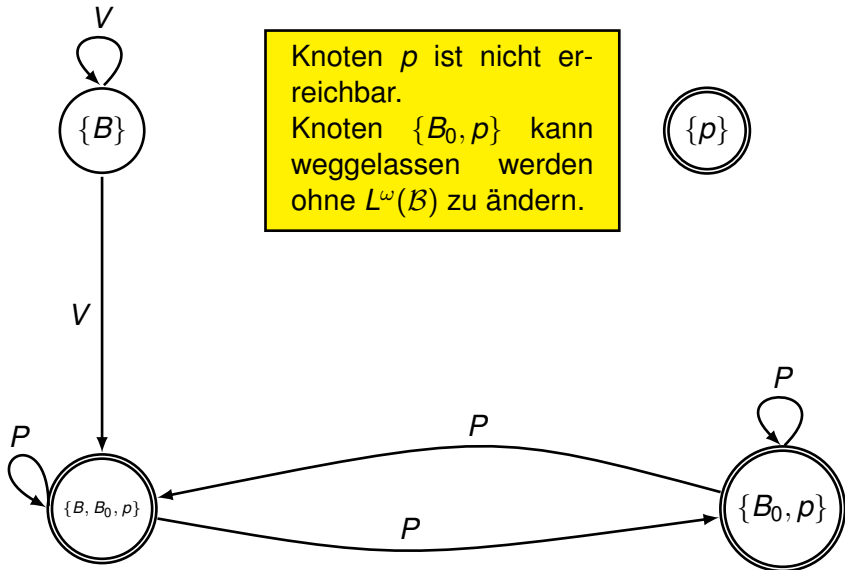
$S = \{\{B\}, \{B_0\}, \{p\}, \{B, B_0, p\}, \{B, B_0\}, \{B, p\}, \{B_0, p\}\}$

Sackgassen

Beispiel

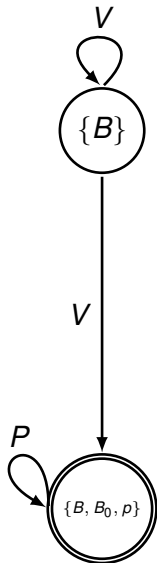


Beispiel



Beispiel

Endergebnis



Beide verbleibenden Zustände sind Startzustände. Man sieht aber, daß es genügt $\{B\}$ als Startzustand zu haben.

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von LTL Formeln ist entscheidbar.

Beweis:

Man konstruiert die Büchi-Automaten \mathcal{A}_B und $\mathcal{A}_{\neg B}$. Es gilt

$$B \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_B) \neq \emptyset$$

$$B \text{ ist allgemeingültig} \quad \Leftrightarrow \quad L^\omega(\mathcal{A}_{\neg B}) = \emptyset$$

Für jeden Büchi-Automaten \mathcal{C} ist die Frage $L^\omega(\mathcal{C}) = \emptyset?$ entscheidbar.

Zur Beschreibung von Mengen von Omega-Strukturen sind äquivalent:

- ▶ Büchi-Automaten
- ▶ ω -reguläre Mengen
- ▶ Monadische Logik zweiter Stufe

Die LTL-beschreibbaren Mengen sind eine echte Teilklasse der durch Büchi-Automaten beschreibbaren.

Äquivalent sind:

- ▶ LTL
- ▶ Prädikatenlogik erster Stufe
- ▶ stern-freie ω -reguläre Mengen