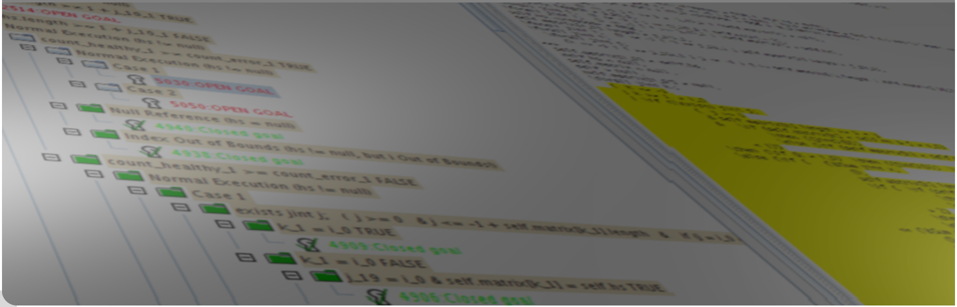
Formale Systeme

Endliche Automaten

Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – Institut für Theoretische Informatik



Endliche Automaten

Wiederholung

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet V (terminale Zeichen)

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet V (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to S$

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet V (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet V (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Akzeptierte Sprachen

Die Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to S$ wird fortgesetzt zu $\delta : S \times V^* \to S$:

$$\begin{array}{lcl}\delta(s, \varepsilon) & = & s \\ \delta(s, aw_1) & = & \delta(s', w_1) \text{ wobei } \delta(s, a) = s'\end{array}$$

Definition von L(EA)

Jeder endliche Automat *EA* akzeptiert eine Menge von Wörtern $L(EA)$.

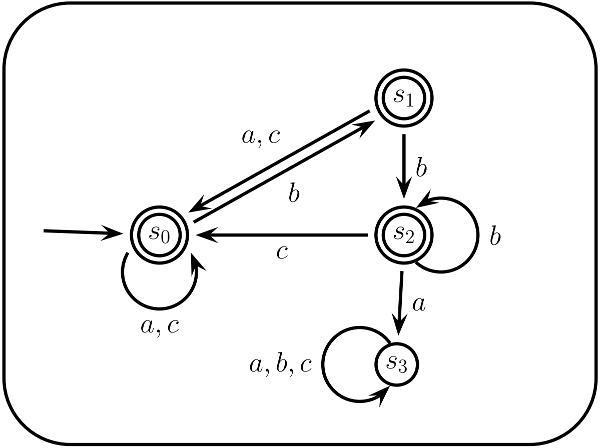
$$L(EA) = \{w \in V^* \mid \delta(s_0, w) \in S_1\}$$

Vollständige endliche Automaten

Variante

Gelegentlich wird in Beispielen die Übergangsfunktion δ nicht für alle Paare (s, a) definiert.
Wird während der Abarbeitung eines Wortes w eine Situation (s, a) erreicht, für die $\delta(s, a)$ nicht definiert ist, so gilt w als nicht akzeptiert.
Ein endlicher Automat, so daß $\delta(s, a)$ für alle $s \in S$ und $a \in V$ definiert ist, heißt ein vollständiger endlicher Automat.

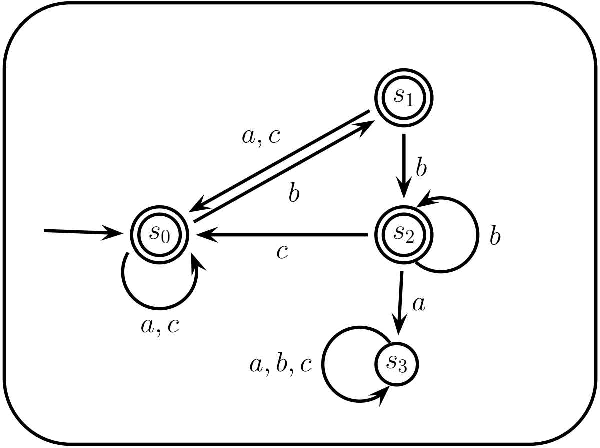
Der Beispielautomat N_{bba}



$V = \{a, b, c\}$
$S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$

$L(N_{bba}) =$

Der Beispielautomat N_{bba}



$V = \{a, b, c\}$
$S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$

$L(N_{bba}) = \{w \in V^* \mid$ *bba* ist kein Teilwort von $w\}$

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \to Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministisch akzeptierte Sprachen

Die Fortsetzung von $\delta : S \times V \to Pot(S)$ zu
$\delta : S \times V^* \to Pot(S)$ wird jetzt wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl} \delta(s, \varepsilon) & = & \{s\} \\ \delta(s, aw_1) & = & \{s' \mid \text{ es gibt } s_1 \in S \text{ mit } s_1 \in \delta(s, a) \text{ und } s' \in \delta(s_1, w_1)\} \end{array}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird jetzt durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \delta(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Spontane Übergänge

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,

Spontane Übergänge

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,

Spontane Übergänge

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,

Spontane Übergänge

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Spontane Übergänge

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Hilfsfunktion ε-*cl*

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-}cl : Pot(S) \to Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-*cl* ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$

Hilfsfunktion ε-*cl*

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-}cl : Pot(S) \rightarrow Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-*cl* ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Hilfsfunktion ε-*cl*

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-}cl : Pot(S) \to Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-*cl* ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Hilfsfunktion ε-*cl*

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-}cl : Pot(S) \to Pot(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

ε-*cl* ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

1. $I \subseteq J$
2. für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung ε-*cl* soll an ε-*closure* erinnern.

Akzeptierte Sprache

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathit{Pot}(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow \mathit{Pot}(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$
\begin{array}{lcl}
\bar{\delta}(s, \varepsilon) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s\}) \\
\bar{\delta}(s, aw_1) & = & \{s' \mid \text{es gibt } s_1, s_2 \text{ mit } s_1 \in \varepsilon\text{-}cl(\{s\}), s_2 \in \bar{\delta}(s_1, a), \\
 & & \quad s' \in \bar{\delta}(s_2, w_1)\})
\end{array}
$$

Akzeptierte Sprache

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \to Pot(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \to Pot(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$\begin{array}{lcl}
\bar{\delta}(s, \varepsilon) & = & \varepsilon\text{-}cl(\{s\}) \\
\bar{\delta}(s, aw_1) & = & \{s' \mid \text{es gibt } s_1, s_2 \text{ mit } s_1 \in \varepsilon\text{-}cl(\{s\}), s_2 \in \bar{\delta}(s_1, a), \\
 & & \qquad s' \in \bar{\delta}(s_2, w_1)\}
\end{array}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* mit spontanen Übergängen akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird wieder durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \bar{\delta}(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Satz von Myhill und Büchi

Satz

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Satz von Myhill und Büchi

Satz

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Dabei kann A spontane Übergänge enthalten und muß auch nicht vollständig sein.

Operationen mit Wortmengen

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,

Operationen mit Wortmengen

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$

Operationen mit Wortmengen

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung

Operationen mit Wortmengen

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
4. $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt

Operationen mit Wortmengen

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1. $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
2. $L^* = \{w_1 \ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
3. $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
4. $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt
5. $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Reguläre Ausdrücke

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

1. $\emptyset \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
4. für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,

Reguläre Ausdrücke

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

1. $\emptyset \in Reg_V$,
2. $\varepsilon \in Reg_V$,
3. für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
4. für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
5. für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,
4. $S((t)^*) = (S(t))^*$,

Semantik regulärer Ausdrücke

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

1. $S(\emptyset) = \emptyset$,
2. $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $S(a) = \{a\}$,
4. $S((t)^*) = (S(t))^*$,
5. $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2)$.

Satz

Satz

Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit

$$S(t) = L(A).$$

Satz

Satz

Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit

$$S(t) = L(A).$$

Wir benutzen im folgenden stillschweigend die Assoziativität der Konkatenation und von $+$ um in regulären Ausdrücken Klammern einzusparen, also $(a + b + c)$ anstelle von $((a + b) + c)$.