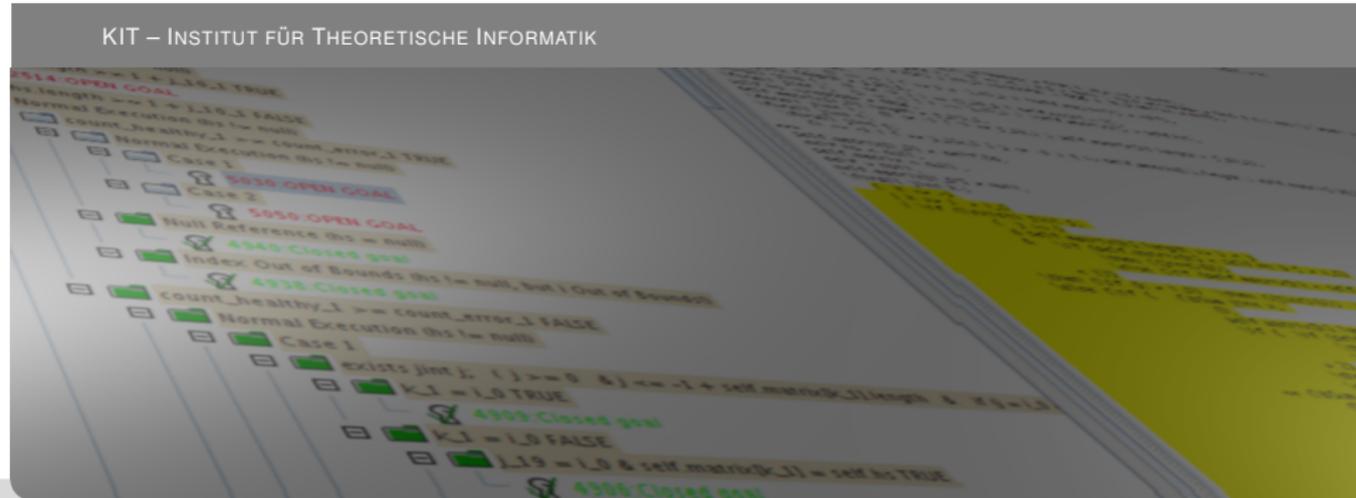


# Formale Systeme

Prädikatenlogik: Sequenzenkalkül  
Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$\Gamma$  wird Antezedent und  $\Delta$  Sukzedent genannt.

## Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$\Gamma$  wird Antezedent und  $\Delta$  Sukzedent genannt.  
Sowohl  $\Gamma$  als auch  $\Delta$  kann die leere Menge sein.

## Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$\Gamma$  wird Antezedent und  $\Delta$  Sukzedent genannt.

Sowohl  $\Gamma$  als auch  $\Delta$  kann die leere Menge sein.

Sei  $\mathcal{D}$  eine prädikatenlogische Struktur und  $\beta$  eine Variablenbelegung:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\Gamma \Rightarrow \Delta) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$$

## Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Formelmengen und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$\Gamma$  wird Antezedent und  $\Delta$  Sukzedent genannt.

Sowohl  $\Gamma$  als auch  $\Delta$  kann die leere Menge sein.

Sei  $\mathcal{D}$  eine prädikatenlogische Struktur und  $\beta$  eine Variablenbelegung:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\Gamma \Rightarrow \Delta) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$$

Es gelten die üblichen Vereinbarungen für leere Disjunktionen und Konjunktionen.

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom} \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left} \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom} \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left} \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right} \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left } \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

$$\text{impl-left } \frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

axiom  $\frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$

not-left  $\frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$

not-right  $\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

impl-right  $\frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{and-left } \frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-left } \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{impl-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left } \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

impl-left

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{impl-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

$$\text{and-left } \frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

and-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left } \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

$$\text{impl-left } \frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{impl-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

$$\text{and-left } \frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{and-right } \frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

$$\text{or-left } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \vee G \Rightarrow \Delta}$$

# Aussagenlogische Axiome und Regeln

$$\text{axiom } \frac{}{\Gamma, F \Rightarrow F, \Delta}$$

$$\text{not-left } \frac{\Gamma, \Rightarrow F, \Delta}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{not-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg F, \Delta}$$

$$\text{impl-left } \frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{impl-right } \frac{\Gamma, F \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \rightarrow G, \Delta}$$

$$\text{and-left } \frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{and-right } \frac{\Gamma \Rightarrow F, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \wedge G, \Delta}$$

$$\text{or-left } \frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \vee G \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{or-right } \frac{\Gamma \Rightarrow F, G, \Delta}{\Gamma \Rightarrow F \vee G, \Delta}$$

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall x F, \{x/X\} F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x F \Rightarrow \Delta}$$

$X$  neue Variable.

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall xF, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall xF \Rightarrow \Delta}$$

$X$  neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall xF, \Delta}$$

$f$  neues

Funktionssymbol,

$\bar{x} = x_1, \dots, x_n$

alle freien

Variablen in  $\forall xF$ .

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall xF, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall xF \Rightarrow \Delta}$$

$X$  neue Variable.

ex-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists xF, \{x/X\}F, \Delta}{\Gamma, \Rightarrow \exists xF, \Delta}$$

$X$  neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall xF, \Delta}$$

$f$  neues  
Funktionssymbol,  
 $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$   
alle freien  
Variablen in  $\forall xF$ .

all-left

$$\frac{\Gamma, \forall xF, \{x/X\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall xF \Rightarrow \Delta}$$

$X$  neue Variable.

ex-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists xF, \{x/X\}F, \Delta}{\Gamma, \Rightarrow \exists xF, \Delta}$$

$X$  neue Variable.

all-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \{x/f(\bar{x})\}F, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall xF, \Delta}$$

$f$  neues  
Funktionssymbol,  
 $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$   
alle freien  
Variablen in  $\forall xF$ .

ex-left

$$\frac{\Gamma, \{x/f(\bar{x})\}F \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists xF \Rightarrow \Delta}$$

$f$  neues  
Funktionssymbol  
 $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$   
alle freien  
Variablen in  $\exists xF$ .

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

eq-subst-right

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(t), \Delta}{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(s), \Delta}$$

identity-right

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow s \doteq s, \Delta}$$

symmetry-right

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s \doteq t, \Delta}{\Gamma \Rightarrow t \doteq s, \Delta}$$

symmetry-left

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq s \Rightarrow \Delta}$$

eq-subst-right

$$\frac{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(t), \Delta}{\Gamma, s \doteq t \Rightarrow F(s), \Delta}$$

eq-subst-left

$$\frac{\Gamma, F(t), s \doteq t \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F(s), s \doteq t \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

Ein Ableitungsbaum ist ein Baum, dessen Knoten mit Sequenzen markiert sind und:

1. hat ein Knoten  $n$  (nur) einen Nachfolgerknoten  $n_1$  und sind  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  und  $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$  die Markierungen von  $n$  und  $n_1$ , dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

Ein Ableitungsbaum ist ein Baum, dessen Knoten mit Sequenzen markiert sind und:

1. hat ein Knoten  $n$  (nur) einen Nachfolgerknoten  $n_1$  und sind  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  und  $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$  die Markierungen von  $n$  und  $n_1$ , dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

2. hat ein Knoten  $n$  zwei Nachfolgerknoten  $n_1$  und  $n_2$  und sind  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ,  $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$  und  $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$  die Sequenzen an den Knoten  $n$ ,  $n_1$  und  $n_2$  dann gibt es eine Sequenzenregel

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

## Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution  $\sigma$ , so daß für die Markierung  $A$  jedes Knoten  $n$ , der keinen Nachfolgerknoten hat,  $\sigma(A)$  ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

## Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution  $\sigma$ , so daß für die Markierung  $A$  jedes Knoten  $n$ , der keinen Nachfolgerknoten hat,  $\sigma(A)$  ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

## Definition

Wir nennen einen Beweisbaum *geschlossen* oder *vollständig* wenn er zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt:

3. es gibt eine Substitution  $\sigma$ , so daß für die Markierung  $A$  jedes Knoten  $n$ , der keinen Nachfolgerknoten hat,  $\sigma(A)$  ein Axiom ist. Dazu zählen auch die beiden Gleichheitsaxiome.

Man beachte daß zunächst  $A \equiv p(s) \Rightarrow p(t)$  kein Axiom zu sein braucht.

Ist  $\sigma$  aber ein Unifikator von  $s$  und  $t$  dann ist  $\sigma(A) \equiv p(\sigma(s)) \Rightarrow p(\sigma(t))$  zu einem Axiom wird.

# Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzkalküls

## Theorem

*Es seien  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ ,  $A \in \text{For}_\Sigma$ . Dann gilt*

$$M \vdash_S A \Rightarrow M \models A$$

# Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzkalküls

## Theorem

*Es seien  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ ,  $A \in \text{For}_\Sigma$ . Dann gilt*

$$M \vdash_S A \Rightarrow M \models A$$

## Theorem

*Es seien  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ ,  $A \in \text{For}_\Sigma$ . Dann gilt*

$$M \models A \Rightarrow M \vdash_S A$$