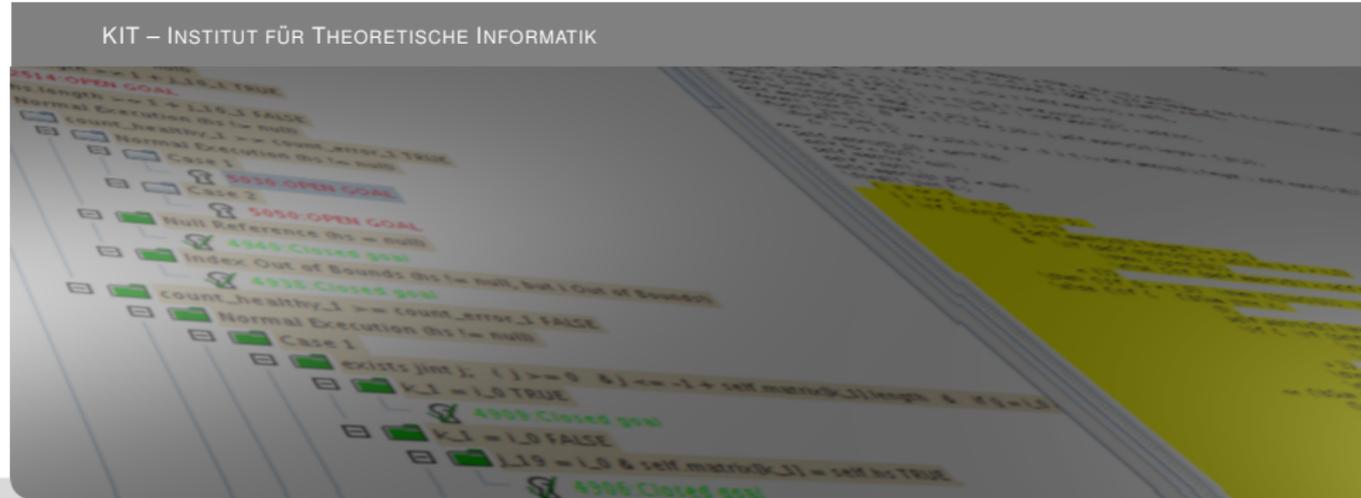


# Formale Systeme

Prädikatenlogik: Resolutionskalkül  
Prof. Dr. Peter H. Schmitt

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- ▶ Die **leere Klausel** wird mit  $\square$  bezeichnet.

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- ▶ Die **leere Klausel** wird mit  $\square$  bezeichnet.
- ▶ Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale.

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- ▶ Die **leere Klausel** wird mit  $\square$  bezeichnet.
- ▶ Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale.
- ▶ Eine Menge von Klauseln wird interpretiert wie die Konjunktion ihrer Klauseln

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- ▶ Die **leere Klausel** wird mit  $\square$  bezeichnet.
- ▶ Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale.
- ▶ Eine Menge von Klauseln wird interpretiert wie die Konjunktion ihrer Klauseln
- ▶ Keine expliziten Quantoren.  
Klauseln sind implizit universell quantifiziert.

# Der Resolutionskalkül

## Syntax

### Definition

- ▶ Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- ▶ Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- ▶ Die **leere Klausel** wird mit  $\square$  bezeichnet.
- ▶ Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale.
- ▶ Eine Menge von Klauseln wird interpretiert wie die Konjunktion ihrer Klauseln
- ▶ Keine expliziten Quantoren.  
Klauseln sind implizit universell quantifiziert.
- ▶ **Fazit:** Der Resolutionskalkül arbeitet nur mit Formeln in Skolemnormalform.

Zu einem Literal  $L$  sei  $\sim L$  das Literal

$$\sim L := \begin{cases} \neg L & \text{wenn } L \text{ ein Atom ist} \\ L' & \text{wenn } L = \neg L' \end{cases}$$

Zu einer Klausel  $C$  sei

$$\sim C := \{\sim L \mid L \in C\}.$$

# Die Resolutionsregel

## Einfache Version

### Definition

- ▶  $C_1, C_2$  Klauseln  $p(t_1), \neg p(t_2)$  Literale
- ▶  $Var(C_1 \cup \{p(t_1)\}) \cap Var(C_2 \cup \{p(t_2)\}) = \emptyset$
- ▶  $\mu$  ist allgemeinsten Unifikator von  $p(t_1)$  und  $p(t_2)$ .

$$\frac{C_1 \cup \{p(t_1)\} \quad C_2 \cup \{\neg p(t_2)\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Die Klausel  $\mu(C_1 \cup C_2)$  heißt eine *Resolvente* der Eingabeklauseln  $C_1 \cup \{p(t_1)\}$  und  $C_2 \cup \{\neg p(t_2)\}$ .

# Die Resolutionsregel

## Allgemeine Version

### Definition

- ▶  $C_1, C_2, K_1, K_2$  sind Klauseln
- ▶  $K_1, K_2 \neq \square$
- ▶  $\text{Var}(C_1 \cup K_1) \cap \text{Var}(C_2 \cup K_2) = \emptyset$
- ▶  $\mu$  ist allgemeinsten Unifikator von  $K_1 \cup \sim K_2$ .

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Die Klausel  $\mu(C_1 \cup C_2)$  heißt eine *Resolvente* der Eingabeklauseln  $C_1 \cup K_1$  und  $C_2 \cup K_2$ .

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln

$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$  und  $\{r(y, z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln

$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$  und  $\{r(y, z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \quad \{r(y, z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln

$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$  und  $\{r(y, z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \quad \{r(y, z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$  ist in diesem Fall  $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln

$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$  und  $\{r(y, z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \quad \{r(y, z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$  ist in diesem Fall  $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$

Der allgemeinste Unifikator ist

$$\mu = \{x/g(c), y/g(c), z/f(g(c))\}$$

# Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \quad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln

$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$  und  $\{r(y, z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \quad \{r(y, z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$  ist in diesem Fall  $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c)))\}$

Der allgemeinste Unifikator ist

$\mu = \{x/g(c), y/g(c), z/f(g(c))\}$

Die Resolvente ist

$$\{p(g(c)), r(g(c), f(g(c)))\}$$

Sei  $M$  eine Klauselmeng.

1. Mit  $Res(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus  $M$ . Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

Sei  $M$  eine Klauselmeng.

1. Mit  $Res(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus  $M$ . Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2.  $R^0(M) = M$

Sei  $M$  eine Klauselmeng.

1. Mit  $Res(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus  $M$ . Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2.  $R^0(M) = M$
3.  $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$

Sei  $M$  eine Klauselmenge.

1. Mit  $Res(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus  $M$ . Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2.  $R^0(M) = M$
3.  $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$
4.  $M$  ist unerfüllbar genau dann, wenn es ein  $n$  gibt mit  $\square \in R^n(M)$

Sei  $M$  eine Klauselmeng.

1. Mit  $Res(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus  $M$ . Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2.  $R^0(M) = M$
3.  $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$
4.  $M$  ist unerfüllbar genau dann, wenn es ein  $n$  gibt mit  $\square \in R^n(M)$
5.  $M \vdash_{\mathbf{R}} A$  gilt genau dann, wenn es ein  $n$  gibt mit  $\square \in R^n(M \cup \{\neg A\})$

Wir wollen die folgende logische Folgerung beweisen:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y)) \\ & \quad \vdash \\ & \forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z) \end{aligned}$$

Es handelt sich dabei um eine Aussage aus der elementaren Mengenlehre zur Transitivität der Teilmengenbeziehung.

Bemerkenswert ist vielleicht, daß die Transitivität allein aus der Definition der Teilmengenrelation gefolgert werden soll, ohne zusätzliche mengentheoretische Axiome über die  $\in$ -Relation.

# Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow x \subseteq y)$$

# Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow x \subseteq y)$$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg \text{conteq}(x, y), \neg \text{memb}(u, x), \text{memb}(u, y)\}$$

mit *conteq* und *memb* für die Infixzeichen  $\subseteq$  und  $\in$ .

# Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow x \subseteq y)$$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg \text{conteq}(x, y), \neg \text{memb}(u, x), \text{memb}(u, y)\}$$

mit *conteq* und *memb* für die Infixzeichen  $\subseteq$  und  $\in$ .

Die 2. Formel wird nach Elimination von  $\rightarrow$  und Skolemisierung  
zu

$$\forall x \forall y \exists u ((u \in x \wedge \neg u \in y) \vee x \subseteq y)$$

$$\forall x \forall y ((f(x, y) \in x \wedge \neg f(x, y) \in y) \vee x \subseteq y)$$

# Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow x \subseteq y)$$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg \text{conseq}(x, y), \neg \text{memb}(u, x), \text{memb}(u, y)\}$$

mit *conseq* und *memb* für die Infixzeichen  $\subseteq$  und  $\in$ .

Die 2. Formel wird nach Elimination von  $\rightarrow$  und Skolemisierung zu

$$\forall x \forall y \exists u ((u \in x \wedge \neg u \in y) \vee x \subseteq y)$$

$$\forall x \forall y ((f(x, y) \in x \wedge \neg f(x, y) \in y) \vee x \subseteq y)$$

Nach Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\{\text{memb}(f(x, y), x), \text{conseq}(x, y)\}, \{\neg \text{memb}(f(x, y), y), \text{conseq}(x, y)\}$$

# Transformation in Klauselnormalform für die Behauptung

Die Negation der Behauptung führt zu

$$\exists x \exists y \exists z (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \wedge \neg x \subseteq z)$$

und nach Einführung von Skolemkonstanten zu den drei

Einerklauseln:

$$\text{conseq}(a, b)$$

$$\text{conseq}(b, c)$$

$$\neg \text{conseq}(a, c)$$

- |      |   |                |
|------|---|----------------|
| (1)  | $\neg \text{conseq}(x, y), \neg \text{memb}(u, x), \text{memb}(u, y)$ | [Vor.]         |
| (2)  | $\text{memb}(f(x, y), x), \text{conseq}(x, y)$                        | [Vor.]         |
| (3)  | $\neg \text{memb}(f(x, y), y), \text{conseq}(x, y)$                   | [Vor.]         |
| (4)  | $\text{conseq}(a, b)$   | [ $\neg$ Beh.] |
| (5)  | $\text{conseq}(b, c)$   | [ $\neg$ Beh.] |
| (6)  | $\neg \text{conseq}(a, c)$  | [ $\neg$ Beh.] |
| (7)  | $\neg \text{memb}(u, a), \text{memb}(u, b)$                           | [4,1]          |
| (8)  | $\neg \text{memb}(u, b), \text{memb}(u, c)$                           | [5,1]          |
| (9)  | $\neg \text{memb}(f(a, c), c)$  | [6,3]          |
| (10) | $\text{memb}(f(a, c), a)$   | [6,2]          |
| (13) | $\text{memb}(f(a, c), b)$   | [7,10]         |
| (19) | $\text{memb}(f(a, c), c)$   | [8,13]         |
| (20) | $\square$   | [19,9]         |

Dieser Beweis wurde von dem automatischen Beweiser OTTER gefunden.

# Beispiel 2

Beweisziel

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y).$$

Als Voraussetzungen stehen dazu zur Verfügung

- ▶ die Definition der Teilmengenrelation

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

und

# Beispiel 2

Beweisziel

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y).$$

Als Voraussetzungen stehen dazu zur Verfügung

- ▶ die Definition der Teilmengenrelation

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

und

- ▶ die Definition der Gleichheit (in der Mengenlehre ist die Gleichheit eine definierte Relation)

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y))$$

# Transformation auf Klauselnormalform

- (1)  $\neg \text{conseq}(x, y) \vee \neg \text{memb}(u, x) \vee \text{memb}(u, y)$
- (2)  $\text{memb}(f(x, y), x) \vee \text{conseq}(x, y)$
- (3)  $\neg \text{memb}(f(x, y), y) \vee \text{conseq}(x, y)$

mit  $eq$  für  $=$  liefert die Definition der Gleichheit

- (4)  $eq(x, y) \vee \text{memb}(g(x, y), x) \vee \text{memb}(g(x, y), y)$
- (5)  $eq(x, y) \vee \neg \text{memb}(g(x, y), x) \vee \neg \text{memb}(g(x, y), y)$
- (6)  $\neg eq(x, y) \vee \text{memb}(u, x) \vee \text{memb}(u, y)$
- (7)  $\neg eq(x, y) \vee \neg \text{memb}(u, x) \vee \neg \text{memb}(u, y)$

mit der neuen Skolemfunktion  $g(x, y)$ .

Die Negation der Behauptung führt zu

- (8)  $\text{conseq}(a, b)$
- (9)  $\text{conseq}(b, a)$
- (10)  $\neg eq(a, b)$

mit den Skolemkonstanten  $a, b, c$

(11)	$\neg memb(x, a) \vee memb(x, b)$	[8,1]
(12)	$\neg memb(x, b) \vee memb(x, a)$	[9,1]
(18)	$memb(g(a, x), b) \vee eq(a, x) \vee memb(g(a, x), x)$	[11,4]
(23)	$\neg memb(g(x, b), a) \vee eq(x, b) \vee \neg memb(g(x, b), x)$	[11,5]
(28)	$memb(g(a, b), b) \vee eq(a, b)$	[Fak 18]
(29)	$\neg memb(g(a, b), a) \vee eq(a, b)$	[Fak 23]
(61)	$memb(g(a, b), b)$	[28,10]
(62)	$memb(g(a, b), a)$	[61,12]
(69)	$eq(a, b)$	[29,62]
(70)	$\square$	[69,10]

Der Beweis wurde wieder mit dem Beweiser OTTER gefunden, der nicht die Mengennotation verwendet und außerdem die Faktorisierungsregel (Fak) benutzt. Man erhält aus dem obigen Beweis einen Beweis ohne Faktorisierung, wenn man die Mengenschreibweise benutzt und die Beweisschritte (28) und (29) einfach wegläßt. Aus (18) und (10) entsteht direkt (61), ebenso kommt man von (23) und (62) direkt zu (69).